RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 7 marzo 1909.

P. BLASERNA, Presidente.

MEMORIE E NOTE
DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Fisica matematica. — *Sulle equazioni della elettrodinamica.* Nota del Socio VITO VOLTERRA.

ART. I. — *La isteresi.*

1. Hertz ha stabilito come equazioni fondamentali della elettrodinamica dei sistemi in quiete, le seguenti [1]:

$$\text{(I)}\quad \begin{cases} A\dfrac{\partial L}{\partial t} = \dfrac{\partial Z}{\partial y} - \dfrac{\partial Y}{\partial z} \\ A\dfrac{\partial M}{\partial t} = \dfrac{\partial X}{\partial z} - \dfrac{\partial Z}{\partial x} \\ A\dfrac{\partial N}{\partial t} = \dfrac{\partial Y}{\partial z} - \dfrac{\partial X}{\partial y} \end{cases} \qquad \text{(I')}\quad \begin{cases} A\dfrac{\partial X}{\partial t} = \dfrac{\partial M}{\partial z} - \dfrac{\partial N}{\partial y} - 4\pi A u \\ A\dfrac{\partial Y}{\partial t} = \dfrac{\partial N}{\partial x} - \dfrac{\partial L}{\partial z} - 4\pi A v \\ A\dfrac{\partial Z}{\partial t} = \dfrac{\partial L}{\partial y} - \dfrac{\partial M}{\partial x} - 4\pi A w \end{cases}$$

in cui

$$\text{(II)}\quad \begin{cases} X = \varepsilon_{11}\mathrm{X} + \varepsilon_{12}\mathrm{Y} + \varepsilon_{13}\mathrm{Z} \\ Y = \varepsilon_{21}\mathrm{X} + \varepsilon_{22}\mathrm{Y} + \varepsilon_{23}\mathrm{Z} \\ Z = \varepsilon_{31}\mathrm{X} + \varepsilon_{32}\mathrm{Y} + \varepsilon_{33}\mathrm{Z} \end{cases} \qquad \text{(II')}\quad \begin{cases} L = \mu_{11}\mathrm{L} + \mu_{12}\mathrm{M} + \mu_{13}\mathrm{N} \\ M = \mu_{21}\mathrm{L} + \mu_{22}\mathrm{M} + \mu_{23}\mathrm{N} \\ N = \mu_{31}\mathrm{L} + \mu_{32}\mathrm{M} + \mu_{33}\mathrm{N} \end{cases}$$

$$\text{(III)}\quad \begin{cases} u = \lambda_{11}(\mathrm{X}-\mathrm{X}') + \lambda_{12}(\mathrm{Y}-\mathrm{Y}') + \lambda_{13}(\mathrm{Z}-\mathrm{Z}') \\ v = \lambda_{21}(\mathrm{X}-\mathrm{X}') + \lambda_{22}(\mathrm{Y}-\mathrm{Y}') + \lambda_{23}(\mathrm{Z}-\mathrm{Z}') \\ w = \lambda_{31}(\mathrm{X}-\mathrm{X}') + \lambda_{32}(\mathrm{Y}-\mathrm{Y}') + \lambda_{33}(\mathrm{Z}-\mathrm{Z}') \end{cases}.$$

[1] Wiedemann's Annalen, 40, pag. 577.

In queste equazioni è ben noto il significato delle varie lettere, e cioè X, Y, Z ; $\mathrm{X}, \mathrm{Y}, \mathrm{Z}$; u, v, w sono respettivamente le componenti della polarizzazione, della forza e della corrente elettrica ; mentre L, M, N; $\mathrm{L}, \mathrm{M}, \mathrm{N}$ sono respettivamente le componenti della polarizzazione e della forza magnetica; e $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}$ quelle della forza elettromotrice.

2. Le equazioni (II), (II') e (III) discendono dalla ipotesi che lo stato attuale della polarizzazione elettrica e della corrente elettrica dipendano dallo stato attuale della forza elettrica; e, analogamente, lo stato attuale della polarizzazione magnetica dipenda dallo stato attuale della forza magnetica.

Ora, la teoria precedente non dà che una prima approssimazione dell'andamento dei fenomeni, giacchè essa esclude i fenomeni d'isteresi. Questi ultimi conducono a ritenere che lo stato attuale della polarizzazione magnetica non dipenda soltanto dalla forza magnetica attuale, ma da tutta la sua storia anteriore, ossia che la polarizzazione magnetica in un punto dipenda, oltre che dalla forza magnetica attuale in quel punto, anche da tutti i valori che precedentemente all'istante attuale ha avuto la forza magnetica nel punto stesso. In modo analogo può dirsi per la polarizzazione elettrica riguardo alla forza elettrica.

Volendo dunque avere una approssimazione successiva e tener conto della isteresi converrà introdurre nei secondi membri delle equazioni (II) e (II') dei termini di correzione e scrivere

$$(\mathrm{II}_a)\quad \begin{cases} X(t) = \varepsilon_{11}\mathrm{X}(t) + \varepsilon_{12}\mathrm{Y}(t) + \varepsilon_{13}\mathrm{Z}(t) + \mathrm{F}_1\left|\left[\mathrm{X}(\tau), \overset{t}{\underset{-\infty}{\mathrm{Y}(\tau)}}, \mathrm{Z}(\tau)\right]\right| \\ Y(t) = \varepsilon_{21}\mathrm{X}(t) + \varepsilon_{22}\mathrm{Y}(t) + \varepsilon_{23}\mathrm{Z}(t) + \mathrm{F}_2\left|\left[\mathrm{X}(\tau), \overset{t}{\underset{-\infty}{\mathrm{Y}(\tau)}}, \mathrm{Z}(\tau)\right]\right| \\ Z(t) = \varepsilon_{31}\mathrm{X}(t) + \varepsilon_{32}\mathrm{Y}(t) + \varepsilon_{33}\mathrm{Z}(t) + \mathrm{F}_3\left|\left[\mathrm{X}(\tau), \overset{t}{\underset{-\infty}{\mathrm{Y}(\tau)}}, \mathrm{Z}(\tau)\right]\right| \end{cases}$$

in cui $\mathrm{F}_1, \mathrm{F}_2, \mathrm{F}_3$ denotano delle quantità che dipendono da tutti i valori di $\mathrm{X}(\tau), \mathrm{Y}(\tau), \mathrm{Z}(\tau)$ corrispondenti a valori dell'argomento τ da $-\infty$ a t, cioè corrispondenti a tutti i tempi anteriori all'istante t. In modo analogo si scriverà

$$(\mathrm{II}'_a)\quad \begin{cases} L(t) = \mu_{11}\mathrm{L}(t) + \mu_{12}\mathrm{M}(t) + \mu_{13}\mathrm{N}(t) + \Phi_1\left|\left[\mathrm{L}(\tau), \overset{t}{\underset{-\infty}{\mathrm{M}(\tau)}}, \mathrm{N}(\tau)\right]\right| \\ M(t) = \mu_{21}\mathrm{L}(t) + \mu_{22}\mathrm{M}(t) + \mu_{23}\mathrm{N}(t) + \Phi_2\left|\left[\mathrm{L}(\tau), \overset{t}{\underset{-\infty}{\mathrm{M}(\tau)}}, \mathrm{N}(\tau)\right]\right| \\ N(t) = \mu_{31}\mathrm{L}(t) + \mu_{32}\mathrm{M}(t) + \mu_{33}\mathrm{N}(t) + \Phi_3\left|\left[\mathrm{L}(\tau), \overset{t}{\underset{-\infty}{\mathrm{M}(\tau)}}, \mathrm{N}(\tau)\right]\right| \end{cases}$$

Noi ricorriamo in tal modo al concetto che abbiamo introdotto e sviluppato nel 1887 col nome di *funzioni dipendenti da altre funzioni* [1] facendo uso della relativa notazione. Ammesse soddisfatte le condizioni volute potremo sviluppare ciascuna funzione F_i in una serie infinita di termini ciascuno dei quali ha la forma

$$\int_{-\infty}^{t} \cdots \int_{-\infty}^{t} G_i(\tau'_1 \dots \tau'_h \,|\, \tau''_1 \dots \tau''_k \,|\, \tau'''_1 \dots \tau'''_e)\, X(\tau'_1) \dots \\ \dots X(\tau'_h)\, Y(\tau''_1) \dots Y(\tau''_k)\, Z(\tau'''_1) \dots Z(\tau'''_e)\, d\tau' \dots d\tau'''_e$$

e la cosa analoga potrà dirsi per ciascuna Φ_i.

Ora se noi ammettiamo come postulato che gli effetti della sovrapposizione di forze elettriche o di forze magnetiche si sommino, cioè supponiamo

$$F_i|[X(\tau) + X'(\tau)\,,\, \underset{-\infty}{\overset{t}{Y}}(\tau) + Y'(\tau)\,,\, Z(\tau) + Z'(\tau)]| = \\ = F_i|[X(\tau)\,,\, \underset{-\infty}{\overset{t}{Y}}(\tau)\,,\, Z(\tau)]| + F_i|[X'(\tau)\,,\, \underset{-\infty}{\overset{t}{Y'}}(\tau)\,,\, Z'(\tau)]|,$$

$$\Phi_i|[L(\tau) + L'(\tau)\,,\, M(\tau) + \underset{-\infty}{\overset{t}{M'}}(\tau)\,,\, N(\tau) + N'(\tau)]| = \\ = \Phi_i|[L(\tau)\,,\, \underset{-\infty}{\overset{t}{M}}(\tau)\,,\, N(\tau)]| + \Phi_i|[L'(\tau)\,,\, \underset{-\infty}{\overset{t}{M'}}(\tau)\,,\, N'(\tau)]|$$

dovremo avere

$$F_i = \int_{-\infty}^{t} \{X(\tau)\, \varphi_{i1}(t\,,\tau) + Y(\tau)\, \varphi_{i2}(t\,,\tau) + Z(\tau)\, \varphi_{i3}(t\,,\tau)\}\, d\tau$$

$$\Phi_i = \int_{-\infty}^{t} \{L(\tau)\, \psi_{i1}(t\,,\tau) + M(\tau)\, \psi_{i2}(t\,,\tau) + N(\tau)\, \psi_{i3}(t\,,\tau)\}\, d\tau$$

onde le (II_a) (II'_a) diverranno

$$(II_b) \quad \begin{cases} X(t) = \varepsilon_{11} X(t) + \varepsilon_{12} Y(t) + \varepsilon_{13} Z(t) + \\ \qquad + \int_a^t (X(\tau)\, \varphi_{11}(t\,,\tau) + Y(\tau)\, \varphi_{12}(t\,,\tau) + Z(\tau)\, \varphi_{13}(t\,,\tau))\, d\tau \\ Y(t) = \varepsilon_{21} X(t) + \varepsilon_{22} Y(t) + \varepsilon_{23} Z(t) + \\ \qquad + \int_a^t (X(\tau)\, \varphi_{21}(t\,,\tau) + Y(\tau)\, \varphi_{22}(t\,,\tau) + Z(\tau)\, \varphi_{23}(t\,,\tau))\, d\tau \\ Z(t) = \varepsilon_{31} X(t) + \varepsilon_{32} Y(t) + \varepsilon_{33} Z(t) + \\ \qquad + \int_a^t (X(\tau)\, \varphi_{31}(t\,,\tau) + Y(\tau)\, \varphi_{32}(t\,,\tau) + Z(\tau)\, \varphi_{33}(t\,,\tau))\, d\tau \end{cases}$$

[1] Rend. Acc. dei Lincei, vol. III, 1887.

$$(II'_b)\quad \begin{cases} L(t) = \mu_{11}\,L(t) + \mu_{12}\,M(t) + \mu_{13}\,N(t) + \\ \qquad + \int_a^t (L(\tau)\,\psi_{11}(t,\tau) + M(\tau)\,\psi_{12}(t,\tau) + N(\tau)\,\psi_{13}(t,\tau))\,d\tau \\ M(t) = \mu_{21}\,L(t) + \mu_{22}\,M(t) + \mu_{23}\,N(t) + \\ \qquad + \int_a^t (L(\tau)\,\psi_{21}(t,\tau) + M(\tau)\,\psi_{22}(t,\tau) + N(\tau)\,\psi_{23}(t,\tau))\,d\tau \\ N(t) = \mu_{31}\,L(t) + \mu_{32}\,M(t) + \mu_{33}\,N(t) + \\ \qquad + \int_a^t (L(\tau)\,\psi_{31}(t,\tau) + M(\tau)\,\psi_{32}(t,\tau) + N(\tau)\,\psi_{33}(t,\tau))\,d\tau \end{cases}$$

in cui deve supporsi che il limite inferiore a degli integrali sia $-\infty$.

Se noi supponiamo che le forze elettriche e magnetiche anteriori ad un dato istante t_0 siano trascurabili, allora basterà prendere il limite inferiore a dei precedenti integrali eguali a t_0.

Sostituendo alle equazioni (II) e (II′) le precedenti equazioni (II_b) e (II'_b) si vede subito che le equazioni (I) e (I′) indefinite dei campi elettromagnetici divengono delle equazioni *integro-differenziali* [1].

Dal punto di vista analitico il tipo delle equazioni non cambierebbe se anche alle (III) si sostituissero delle relazioni integrali di forma analoga alle relazioni (II_b) e (II'_b).

Art. II. — *I coefficienti.*

1. Nelle equazioni (II_b) e (II'_b) figurano scritte esplicitamente le sole variabili t, τ, ma dovremo tener presente che X, Y, Z; L, M, N; $\mathrm{X}, \mathrm{Y}, \mathrm{Z}$; $\mathrm{L}, \mathrm{M}, \mathrm{N}$ sono funzioni anche di x, y, z. In generale anche i coefficienti $\varepsilon_{rs}, \mu_{rs}$ saranno funzioni di x, y, z e così pure i coefficienti φ_{rs} e ψ_{rs}; solo nel caso di un mezzo omogeneo potremo ritenere i detti coefficienti indipendenti da x, y, z.

Quando si passa da un mezzo ad un altro, lungo la superficie limite avranno luogo delle equazioni di condizione che possono senz'altro aversi col mezzo tenuto da Hertz nel § 8 della citata Memoria a cui rimandiamo.

2. Supposto il limite inferiore degl'integrali finito nelle (II_b) e (II'_b) potremo invertire le equazioni stesse coi metodi che detti per la risoluzione delle equazioni integrali [2], essendo il determinante delle ε_{rs} e delle μ_{rs} diverso da zero, e potremo quindi esprimere le componenti della forza elettrica per mezzo delle componenti della polarizzazione elettrica e le componenti della forza magnetica per mezzo delle componenti della polarizzazione magnetica.

(1) Rend. Acc. Lincei, 7 e 21 febbraio 1909.

(2) Rend. Acc. dei Lincei, 1896, *Sulla inversione degli integrali definiti*, § 5.

3. È facile trovare il significato dei coefficienti φ_{rs} e ψ_{rs}. Così

$$\varphi_{11}(t,\tau)\,d\tau\ ,\ \varphi_{21}(t,\tau)\,d\tau\ ,\ \varphi_{31}(t,\tau)\,d\tau$$

rappresentano le componenti della polarizzazione elettrica indotta al tempo t da una forza elettrica unitaria che ha agito nella direzione x nell'intervallo di tempo $(\tau, \tau + d\tau)$.

4. Nella ipotesi che le componenti della forza elettrica e della forza magnetica si mantengano sempre inferiori a limiti finiti, nel caso di $a = -\infty$ nelle (II_b) e (II'_b) converrà ammettere che i coefficienti φ_{rs} e ψ_{rs} siano infinitesimi per $\tau = -\infty$, e più precisamente supporremo

$$(1)\qquad |\varphi_{rs}(t,\tau)| < \frac{B}{(t-\tau)^{1+\varepsilon}}\quad |\psi_{rs}(t,\tau)| < \frac{B'}{(t-\tau)^{1+\varepsilon'}}$$

con $\varepsilon > 0$, $\varepsilon' > 0$ e B e B' costanti finite positive.

ART. III. — *Condizione del cappio chiuso.*

1. Consideriamo un punto F dello spazio avente le coordinate X, Y, Z ed un altro punto P avente le coordinate X, Y, Z. Spostandosi F con continuità si sposterà P con continuità ed ambedue i punti descriveranno due linee.

Supponiamo ora che *ogni qualvolta* F *descrive periodicamente una traiettoria chiusa*, P *descriva pure periodicamente e con lo stesso periodo una traiettoria chiusa*; in altri termini *se* $X(\tau), Y(\tau), Z(\tau)$ *sono funzioni periodiche qualunque di* τ, $X(t), Y(t), Z(t)$ *siano pure funzioni periodiche collo stesso periodo di t* (1).

2. Chiameremo questa condizione la *condizione del cappio chiuso per la polarizzazione elettrica*, ed andremo a ricavarne le conseguenze.

Riprendiamo la prima delle (II_b) e supponiamo $Y = Z = 0$ e X periodica col periodo $T > 0$. Avremo

$$X(t+T) = \varepsilon_{11} X(t+T) + \int_{-\infty}^{t+T} X(\tau)\,\varphi_{11}(t+T,\tau)\,d\tau$$

e in virtù della condizione del cappio chiuso

$$X(t) = \varepsilon_{11} X(t) + \int_{-\infty}^{t+T} X(\tau)\,\varphi_{11}(t+T,\tau)\,d\tau$$

(1) Naturalmente dovremo ammettere che la periodicità abbia luogo dal tempo $-\infty$, ossia dovremo supporre nelle (II_b) il limite inferiore $-\infty$. Se il limite inferiore fosse finito dovrebbero supporsi $X(t), Y(t), Z(t)$ nulle pei valori di τ inferiori ad un dato limite, il che sarebbe in contradizione colla ipotesi della periodicità.

quindi

$$\int_{-\infty}^{t} X(\tau)\,\varphi_{11}(t,\tau)\,d\tau = \int_{-\infty}^{t+T} X(\tau)\,\varphi_{11}(t+T,\tau)\,d\tau =$$

$$= \int_{-\infty}^{t} X(\tau)\,\varphi_{11}(t+T,\tau+T)\,d\tau .$$

Siccome $X(\tau)$ è una funzione periodica arbitraria col periodo T, così dall'equazione precedente segue

$$\varphi_{11}(t,\tau) + \sum_{1}^{\infty}{}_{n}\,\varphi_{11}(t,\tau-nT) = \varphi_{11}(t+T,\tau+T) + \sum_{0}^{\infty}{}_{n}\,\varphi_{11}(t+T,\tau-nT)$$

in cui τ è compreso fra t e $t-T$.

Le due serie, saranno convergenti in virtù delle (1) e avremo

$$\left|\sum_{1}^{\infty}{}_{n}\,\varphi_{11}(t,\tau-nT)\right| < \frac{B}{T^{1+\varepsilon}} \sum_{1}^{\infty}{}_{n}\,\frac{1}{n^{1+\varepsilon}}$$

$$\left|\sum_{0}^{\infty}{}_{n}\,\varphi_{11}(t-T,\tau-nT)\right| < \frac{B}{T^{1+\varepsilon}} \sum_{1}^{\infty}{}_{n}\,\frac{1}{n^{1+\varepsilon}}$$

quindi

$$\varphi_{11}(t,\tau) = \varphi_{11}(t+T,\tau+T) + \frac{2B\eta}{T^{1+\varepsilon}} \sum_{1}^{\infty}\frac{1}{n^{1+\varepsilon}}$$

ove η è un numero compreso fra $+1$ e -1.

Se $\lambda < T-(t-\tau)$, avremo che $T-\lambda$ sarà positivo e $\tau+\lambda$ sarà compreso fra $t+\lambda$ e $t+\lambda-(T-\lambda)$, perciò nella equazione precedente si potrà cambiare t, τ, T respettivamente in $t+\lambda$, $\tau+\lambda$, $T-\lambda$ e avremo

$$\varphi_{11}(t,\tau) - \varphi_{11}(t+\lambda,\tau+\lambda) = \left(\frac{2B\eta}{T^{1+\varepsilon}} - \frac{2B\eta'}{(T-\lambda)^{1+\varepsilon}}\right) \sum_{1}^{\infty}\frac{1}{n^{1+\varepsilon}} .$$

essendo η' un numero compreso fra $+1$ e -1.

Siccome questa equazione vale comunque grande sia T, così dovrà essere

$$\varphi_{11}(t,\tau) = \varphi_{11}(t+\lambda,\tau+\lambda)$$

qualunque sia λ e perciò $\varphi_{11}(t,\tau)$ sarà una funzione della differenza $t-\tau$.

Nello stesso modo si dimostra che *tutte le* φ_{rs} *sono funzioni di* $t-\tau$. Analogamente *se la condizione del cappio chiuso varrà per la polarizzazione magnetica i coefficienti* ψ_{rs} *saranno funzioni di* $t-\tau$.

3. Se ora ci riferiamo al significato trovato precedentemente per i coefficienti φ_{rs}, ψ_{rs}, potremo dire: *la condizione del cappio chiuso per la polarizzazione elettrica (o magnetica) significa che la polarizzazione elettrica (o magnetica) indotta dopo un dato tempo da una data forza elettrica*

(o magnetica) che ha agito durante un intervallo di tempo dt è invariabile qualunque sia l'istante in cui la forza elettrica (o magnetica) ha agito.

Questa condizione può chiamarsi *la invariabilità dell'isteresi elettrica (o magnetica)* attraverso il tempo, e perciò essa può considerarsi come una conseguenza della condizione del cappio chiuso.

4. Supponiamo ora reciprocamente che la condizione della invariabilità della isteresi elettrica sia soddisfatta, cioè i coefficienti φ_{rs} siano funzioni di $t-\tau$.

Dalle (II_b) segue, se le (1) son soddisfatte,

$$X(t+T) = \varepsilon_{11} X(t+T) + \varepsilon_{12} Y(t+T) + \varepsilon_{13} Z(t+T) +$$
$$+ \int_{-\infty}^{t+T} (X(\tau)\varphi_{11}(t+T-\tau) + Y(\tau)\varphi_{12}(t+T-\tau) + Z(\tau)\varphi_{13}(t+T-\tau))\, d\tau$$
$$= \varepsilon_{11} X(t+T) + \varepsilon_{12} Y(t+T) + \varepsilon_{13} Z(t+T) +$$
$$+ \int_{-\infty}^{t} (X(\tau+T)\varphi_{11}(t-\tau) + Y(\tau+T)\varphi_{12}(t-\tau) + Z(\tau+T)\varphi_{13}(t-\tau))\, d\tau$$

quindi se X, Y, Z saranno periodiche col periodo T, anche $X(t)$ sarà periodica collo stesso periodo, e similmente si prova la periodicità di $Y(t)$ e $Z(t)$; mentre analoga dimostrazione si potrà fare pel magnetismo.

Dunque *la condizione della invariabilità della isteresi elettrica (o magnetica) porta come conseguenza quella del cappio chiuso della polarizzazione elettrica (o magnetica).*

Art. IV. — *Il caso statico e l'equazione integro-differenziale di tipo ellittico.*

1. Consideriamo ora il caso più semplice, cioè che il mezzo non sia conduttore e che le quantità L, M, N; X, Y, Z variino col tempo così lentamente da poter trascurare $\frac{\partial L}{\partial t}, \frac{\partial M}{\partial t}, \frac{\partial N}{\partial t}$; $\frac{\partial X}{\partial t}, \frac{\partial Y}{\partial t}, \frac{\partial Z}{\partial t}$ (*caso statico*).

Avremo allora

$$\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z} = 0 \;,\; \frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x} = 0 \;,\; \frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} = 0$$
$$\frac{\partial N}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial z} = 0 \;,\; \frac{\partial L}{\partial z} - \frac{\partial N}{\partial x} = 0 \;,\; \frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial y} = 0$$

ossia

$$X = \frac{\partial V}{\partial x} \;,\; Y = \frac{\partial V}{\partial y} \;,\; Z = \frac{\partial V}{\partial z}$$
$$L = \frac{\partial W}{\partial x} \;,\; M = \frac{\partial W}{\partial y} \;,\; N = \frac{\partial W}{\partial z}.$$

2. Supponiamo che le ε_{rs}, φ_{rs} siano indipendenti da x, y, z. Prendiamo per assi coordinati gli assi principali della quadrica

$$(2) \qquad \varepsilon_{11}x^2 + \varepsilon_{22}y^2 + \varepsilon_{33}z^2 + (\varepsilon_{23} + \varepsilon_{32})yz + (\varepsilon_{31} + \varepsilon_{13})zx + (\varepsilon_{12} + \varepsilon_{21})xy = 1.$$

Se questi coincidono cogli assi della quadrica

$$(3) \qquad \varphi_{11}x^2 + \varphi_{22}y^2 + \varphi_{33}z^2 + (\varphi_{23} + \varphi_{32})yz + (\varphi_{31} + \varphi_{13})zx + (\varphi_{12} + \varphi_{21})xy = 1$$

qualunque siano i valori di t e τ, le (II_b) diverranno

$$\begin{cases} X = \varepsilon_{11}\dfrac{\partial V(t)}{\partial x} + \displaystyle\int_a^t \frac{\partial V(\tau)}{\partial x}\varphi_{11}(t,\tau)\,d\tau \\ Y = \varepsilon_{22}\dfrac{\partial V(t)}{\partial y} + \displaystyle\int_a^t \frac{\partial V(\tau)}{\partial y}\varphi_{22}(t,\tau)\,d\tau \\ Z = \varepsilon_{33}\dfrac{\partial V(t)}{\partial z} + \displaystyle\int_a^t \frac{\partial V(\tau)}{\partial z}\varphi_{33}(t,\tau)\,d\tau \end{cases}$$

e perciò se

$$\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} = 0$$

si avrà, supposto $a = t_0 = 0$

$$\varepsilon_{11}\frac{\partial^2 V(t)}{\partial x^2} + \varepsilon_{22}\frac{\partial^2 V(t)}{\partial y^2} + \varepsilon_{33}\frac{\partial^2 V(t)}{\partial z^2} + \int_0^t \left(\frac{\partial^2 V(\tau)}{\partial x^2}\varphi_{11} + \frac{\partial^2 V(\tau)}{\partial y^2}\varphi_{22} + \frac{\partial^2 V(\tau)}{\partial z^2}\varphi_{33}\right) d\tau = 0,$$

la quale con un cambiamento lineare nelle variabili x, y, z si riduce all'equazione integro-differenziale

$$\Delta^2 V(t) + \int_0^t \left(\frac{\partial^2 V(\tau)}{\partial x^2} f(t,\tau) + \frac{\partial^2 V(\tau)}{\partial y^2}\varphi(t,\tau) + \frac{\partial^2 V(\tau)}{\partial z^2}\psi(t,\tau)\right) d\tau = 0$$

di cui abbiamo dato il tipo del processo d'integrazione in una Nota precedente [1]. Non si incontrerebbero maggiori difficoltà se la quadrica (3) avesse assi variabili con τ e t.

3. Scopo principale della presente Nota è stato quello di mettere in luce l'origine della precedente equazione integro-differenziale. Nello stesso tempo l'analisi impiegata nella Nota citata prova che, anche lasciando del tutto arbitrarie le funzioni che individuano l'isteresi, si può procedere a

[1] Rend. Acc. dei Lincei, sedute 7 e 21 febbraio 1909.

trattazioni sistematiche, senza che le questioni abbiano un grado di indeterminatezza o presentino difficoltà tali da essere inadeguate ai mezzi analitici di cui oggi possiamo disporre.

Come nelle varie questioni di fisica matematica e di meccanica analitica conviene lasciare, finchè è possibile, indeterminati i coefficienti, salvo poi a fissarli nelle questioni concrete, così in modo analogo appare qui conveniente di lasciare indeterminate le funzioni sopra ricordate, risolvendo le questioni colla maggior generalità possibile, salvo poi a fissare le funzioni stesse caso per caso o anche a cercar di determinarle, desumendole dal confronto delle formule risolutive con i resultati dell'osservazione. In tal modo si rivela il carattere proprio dei metodi che si riattaccano al concetto di funzioni dipendenti da altre funzioni a cui appartengono quelli impiegati nelle questioni delle equazioni integrali [1] e delle equazioni integro-differenziali.

Meccanica. — *Corpi equivalenti rispetto alla attrazione newtoniana esterna.* Nota del Corrispondente P. Pizzetti.

1. Supponiamo conosciuto un modo di distribuzione di materia attrattiva entro lo spazio τ limitato da una superficie chiusa S, e chiediamoci quali variazioni si possano apportare a quel modo di distribuzione senza che resti alterata la attrazione che la massa esercita sui punti esterni ad S.

Possiamo porre il problema sotto la forma seguente. Siano k e $k' = k + h$ due funzioni finite delle coordinate x, y, z dei punti di τ, e chiamiamo C e C′ i due corpi materiali, entrambi non esterni ad S, le cui densità generiche sono k e k'; si vuole che

$$(1) \qquad \int_\tau \frac{k \cdot d\tau}{r} = \int_\tau \frac{(k+h)\,d\tau}{r},$$

ove r è la distanza dell'elemento $d\tau$ da un punto qualunque *esterno* ad S. I corpi C, C′ si diranno *equivalenti* rispetto alla attrazione newtoniana esterna. Se si immagina un corpo (ideale) C″ la cui densità generica sia h, la funzione potenziale di esso sui punti esterni ad S sarà *nulla*, poichè dalla (1) si deduce

$$\int_\tau \frac{h \cdot d\tau}{r} = 0;$$

lo chiameremo *corpo di attrazione nulla.*

[1] Compte rendus, 1906, 1er Sémestre, page 696.

L'enunciato problema di equivalenza si riduce pertanto alla ricerca di tutti i corpi di attrazione nulla, interni o, almeno, non esterni alla superficie S. Potremo dire che la densità di un corpo C′ equivalente a un dato corpo C, è, in ogni punto, la somma algebrica della densità k di C, in quel punto, e di quella h di un corpo di attrazione nulla, sempre nello stesso punto. Ma, naturalmente, tra gli infiniti corpi di attrazione nulla che convengono ad un dato spazio τ, si avranno a considerare, per la realtà fisica della soluzione, soltanto quelli pei quali la detta somma algebrica risulta non minore di zero. Basterà per questo che, detto k_m il valor minimo della densità nel corpo C ed h_m il minimo (algebrico) di h, sia $-h_m < k_m$, o, più semplicemente, che il valore assoluto di h non superi un certo limite.

2. Assunto, entro lo spazio τ chiuso dalla superficie S, un punto O come origine di coordinate, e indicate con ϱ e con ϱ' le distanze rispettive di O dall'elemento $d\tau$ e da un punto P esterno ad S, e con r la distanza di P da $d\tau$, avremo col noto sviluppo

$$\int_\tau \frac{h \,.\, d\tau}{r} = \sum_0^\infty \frac{1}{\varrho'^{n+1}} \int_\tau \varrho^n \,.\, \mathrm{P}_n \,.\, h \,.\, d\tau \,, \tag{2}$$

purchè si supponga il punto P abbastanza lontano perchè sia sempre $\varrho < \varrho'$. È qui indicato con P_n il polinomio di ordine n di Legendre, che ha per argomento il coseno dell'angolo fra i due raggi vettori ϱ, ϱ'. Affinchè la (2) si annulli per ogni punto esterno P, è necessario e sufficiente che sia, per ogni valore intero e positivo di n,

$$\int_\tau \varrho^n \,.\, \mathrm{P}_n \,.\, h \,.\, d\tau = 0 \,. \tag{3}$$

Posto in questa successivamente $n = 0, 1, 2$, si deducono in modo ovvio dalle (3) i risultati seguenti:

$$\int_\tau h \,.\, d\tau = 0 \quad , \qquad \int_\tau x \,.\, h \,.\, d\tau = 0$$

$$\int_\tau x \,.\, y \,.\, h \,.\, d\tau = 0 \quad , \quad \int_\tau (x^2 - y^2)\, h \,.\, d\tau = 0$$

e le altre sei relazioni che, con rotazione delle lettere x, y, z, si deducono dalle tre ultime.

Sostituendo per h la differenza $k' - k$ fra le densità dei due corpi equivalenti C, C′, queste relazioni possono enunciarsi così:

a) *Le masse dei due corpi sono eguali* (il che era del resto evidente per le proprietà della funzione potenziale all'infinito).

b) *I due corpi hanno lo stesso centro di massa.*

c) *Essi hanno gli stessi assi principali d'inerzia.*

d) *I loro momenti principali d'inerzia sono equidifferenti.*

I due ultimi enunciati si riferiscono propriamente all'ellissoide *centrale* d'inerzia, ma, le masse essendo eguali, essi si estendono all'ellissoide d'inerzia relativo ad ogni altro punto.

Il teorema da me dimostrato in un precedente lavoro [1], che: *se la funzione potenziale esterna di un corpo è simmetrica rispetto ad un asse, l'ellissoide centrale di inerzia è di rotazione,* può considerarsi come conseguenza particolare dell'enunciato *d*).

Si può, senza molto limitare il campo d'applicazione della ricerca, supporre la superficie S una sfera; giacchè non è necessario che i corpi considerati riempiano *tutto* lo spazio τ.

Chiamiamo R il raggio della sfera e ammettiamo che la densità h nei punti di una qualunque sfera concentrica di raggio ϱ ($\leq$ R) sia esprimibile colla serie

$$h = \sum_0^\infty A_s Y_s \tag{4}$$

dove Y_s è *funzione sferica di ordine s* dei due angoli (θ e v, colatitudine e longitudine) che fissano la direzione del raggio vettore ϱ. Al variare di ϱ, varieranno i coefficienti A_s; *ammettiamo che* A_s *sia funzione integrabile di* ϱ nell'intervallo (0, R). Allora dalle notissime proprietà delle funzioni sferiche si deduce che, affinchè la (3) sia soddisfatta, è necessario e sufficiente che A_s soddisfaccia all'unica condizione

$$\int_0^R \varrho^{s+2} . A_s . d\varrho = 0 . \tag{5}$$

3. Si può trattare il problema (e giungere in particolare alla condizione (5)) in un altro modo. Detta $f(x, y, z)$ la funzione potenziale del corpo C'' di attrazione esterna nulla, per un punto qualunque del considerato spazio τ, questa dovrà essere finita e continua insieme colle sue derivate 1ª e avere le derivate 2ª finite e integrabili. E di più pei punti della superficie S dovrà aversi

$$f = 0 \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial n} = 0 , \tag{6}$$

giacchè la funzione potenziale di C'' è nulla all'esterno e, d'altra parte, essa e le sue derivate 1ª variano con continuità nel passaggio attraverso S.

Reciprocamente, ogni funzione f delle coordinate di τ, la quale, insieme colla sua derivata normale, si annulli sulla superficie S, e soddisfaccia, entro τ, alle sopradette condizioni di regolarità, potrà considerarsi come fun-

[1] *Relazioni fra i momenti d'inerzia di un corpo del quale la funzione potenziale è simmetrica intorno ad un asse.* Questi Rendiconti, 1° semestre 1905.

zione potenziale interna di un corpo di attrazione nulla, contenuto entro S, la cui densità generica sia espressa da

$$h = -\frac{\Delta_2 f}{4\pi}. \tag{7}$$

Infatti una notissima formola di Stokes, ove si indichi con r la distanza dell'elemento $d\tau$ da un punto interno, dà in forza delle (6):

$$f = -\frac{1}{4\pi}\int_\tau \frac{\Delta_2 f}{r}\, d\tau .$$

Così, se la superficie S è rappresentata da una equazione

$$F(x, y, z) = 0$$

ove $F(x, y, z)$ è funzione che, nell'interno di τ, soddisfaccia alle già dette condizioni di regolarità, si avrà un'infinità di soluzioni del problema coll'assumere

$$f = [F(x, y, z)]^2 \cdot \varphi(x, y, z)$$

dove φ è funzione qualunque, soggetta soltanto alle stesse condizioni di regolarità.

Supposto ancora che la S sia una sfera, la f potrà porsi sotto la forma

$$f = \sum_0^\infty B_s(\varrho) \cdot Y_s , \tag{8}$$

dove le $B_s(\varrho)$ sono funzioni finite e continue di ϱ insieme colle loro derivate 1ª, e dovranno soddisfare alle condizioni

$$B_s = 0 \qquad \frac{dB_s}{d\varrho} = 0 \qquad \text{per } \varrho = R . \tag{9}$$

Tenuto conto dell'equazione alle derivate parziali cui le funzioni sferiche Y_s soddisfanno, si ha senza difficoltà

$$\Delta_2 f = \frac{1}{\varrho^2}\sum_0^\infty \left\{\frac{d}{d\varrho}\left(\varrho^2 \frac{dB_s}{d\varrho}\right) - s(s+1)\, B_s\right\} Y_s .$$

Quindi la (7) dà

$$h = \sum_0^\infty A_s\, Y_s ,$$

ove si ponga

$$A_s = \frac{-1}{4\pi\,\varrho^2}\left\{\frac{d}{d\varrho}\left(\varrho^2 \frac{dB_s}{d\varrho}\right) - s(s+1)\, B_s\right\}. \tag{10}$$

Colla integrazione per parti, è facilissimo verificare che la A_s definita dalla (10), tenuto conto delle (9) soddisfa alla equazione integrale (5).

4. Un ultimo modo, molto generale, di ricerca di corpi di attrazione nulla è il seguente.

Si consideri un corpo sferico, formato di strati sferici concentrici di uniforme densità, e nel quale la densità $f(\varrho)$ a distanza ϱ dal centro soddisfaccia alla condizione

$$\int_0^c \varrho^2 . f(\varrho) . d\varrho = 0$$

ove con c si indica il raggio della sfera esterna. Un tal corpo esercita attrazione *nulla* all'esterno.

Si divida ora lo spazio τ da principio considerato in elementi infinitesimi $d\tau$ e si considerino gli infiniti solidi sferici aventi i loro centri nei baricentri degli elementi $d\tau$, il raggio c funzione delle coordinate del rispettivo centro e la densità generica $f(\varrho)$ uguale a

$$b . \varphi(\varrho , c) . d\tau$$

dove b è essa pure funzione delle coordinate del centro e $\varphi(\varrho , c)$ soddisfa alla

$$\int_0^c \varrho^2 . \varphi(\varrho , c) . d\tau = 0 .$$

Un tal sistema di solidi sterici costituirà un corpo di attrazione nulla. Il modo di variare del raggio c sarà soggetto all'unica condizione che niuno dei considerati solidi sferici esca fuori dalla superficie S limitante lo spazio τ. Non è difficile dimostrare che, in particolare, si può scegliere la funzione b in guisa che, escluso uno strato di grossezza finita aderente alla superficie S, la densità h della rimanente parte dello spazio τ risulti uguale ad una *costante* arbitraria. Il che è quanto dire che si può accrescere o diminuire di una costante qualsiasi la densità nell'*interno* di un corpo, purchè si alteri opportunamente la densità degli strati prossimi alla superficie.

Ma di questi risultati, come pure dei precedenti, darò sviluppata relazione in un più esteso lavoro che intendo pubblicare altrove.

Chimica. — *Azioni chimiche della luce.* Nota XIII del Socio G. Ciamician e di P. Silber.

Nella presente Nota descriviamo alcuni prodotti di condensazione che abbiamo avuto occasione di preparare in questi ultimi anni; essendo stati occupati da altre ricerche, questi studî non furono proseguiti in modo sistematico.

Benzaldeide.

Già nella nostra V Nota (1) abbiamo descritto il contegno dell'aldeide benzoica alla luce e detto come per prolungata insolazione questo corpo si trasformi in una resina della stessa composizione. Più tardi Mascarelli (2) studiando il contegno della benzaldeide in presenza dell'iodilbenzolo osservò che assieme ad altri prodotti si forma un trimero cristallino $(C_6H_7O)_3$, dal punto di fusione 250°.

Noi abbiamo ripreso le nostre vecchie esperienze allo scopo di vedere se questo trimero si formasse anche senza l'intervento di composti iodurati ed inoltre per studiare più particolarmente la resina, che è il prodotto principale della reazione. Vennero lasciati esposti alla luce 100 gr. di benzaldeide dal 19, V, 1905 al 30, X, 1907, cioè assai più del tempo necessario perchè la resinificazione sia quasi completa. Nel tubo la massa rosso bruna e trasparente era pressochè solida ed in essa si trovavano incluse alcune goccie d'acqua. Il prodotto venne trattato con etere, che a poco a poco scioglie la resina; restano indietro piccole quantità di cristalli bianchi (0,8 gr.) che vennero raccolti sul filtro, lavati con etere e purificati dall'acido acetico glaciale. Fondevano a 245-246° e si dimostrarono identici al *trimero* suaccennato scoperto da Mascarelli.

La soluzione eterea, liberata del solvente, dà un residuo resinoso, che venne distillato col vapore acqueo; passano piccole quantità di un olio (circa 12 gr.) che raccolto e distillato a sua volta, bolliva fra 177 e 200° ed era formato prevalentemente da aldeide benzoica. Nel liquido acquoso che resta indietro, si separano col raffreddamento dei cristalli, mentre la resina si deposita in fondo al pallone formando un grosso bottone giallo.

I cristalli bianchi sono costituiti in parte da acido benzoico, in parte dall'idrobenzoino (p. f. 136°). A proposito della formazione di quest'ultimo,

$$C_6H_5 . CHOH . CHOH . C_6H_5,$$

vogliamo aggiungere che noi da principio la attribuimmo alla presenza di piccole tracce d'acqua, che avrebbe potuto esercitare sulla benzaldeide, per

(1) Questi Rendiconti V, vol. 12, I, pag. 235.

(2) Ibid., vol. 15, II, pag. 376.

influenza della luce, un azione contemporaneamente ossidante e riducente, dando origine agli idrobenzoini e ad acido benzoico. Ma esperienze eseguite colla aldeide benzoica in modo da evitare più perfettamente che ci fu possibile la presenza di umidità, ci dettero, dopo una insolazione dal 21, XII 1907 al 17, I, 1908, i medesimi risultati.

La resina venne bollita ripetutamente con acqua per liberarla dalle sostanze cristalline ora menzionate. Il prodotto aveva l'aspetto già descritto altre volte e pesava 82,5 gr. Per purificarlo venne sciolto in etere, la soluzione dibattuta con carbonato sodico e dopo essere stata lavata e poi seccata con cloruro di calcio, precipitata con etere petrolico. Si ottiene un'abbondante separazione amorfa, lievemente colorata in giallo, che servì direttamente per le ulteriori esperienze.

Nelle nostre precedenti ricerche abbiamo trovato che questa resina, che ha la stessa composizione dell'aldeide da cui proviene, dà in benzolo un peso molecolare corrispondente ad un polimero assai elevato di circa $9C_7H_6O$; appariva però necessario determinare il peso molecolare in un altro solvente per vedere se tale risultato non fosse determinato in parte dal potere associante del benzolo. A tale scopo una parte della resina venne ulteriormente purificata, precipitandola più volte dalla soluzione benzolica con etere petrolico (p. eb. 40-70°) ed in fine dall'etere anidro. Il prodotto, seccato a 100°, è una polvere bianca, che fonde fra i 160° e i 170°. Determinandone il peso molecolare in acido acetico glaciale si ottiene realmente un valore minore, corrispondente ad un *tetramero*' $4C_7H_6O$. Ma per considerare tale formola quale espressione della grandezza molecolare della resina erano necessarie ulteriori prove. Queste dettero per risultato che il prodotto di condensazione dell'aldeide benzoica è in grado di combinarsi con la fenilidrazina e la semicarbazide. Essendo il semicarbazone di più facile purificazione, lo abbiamo preferito. A questo scopo abbiamo trattato una soluzione di 3 gr. di resina in 90 cc. d'acido acetico glaciale con 3 gr. di cloridrato di semicarbazide e 3 gr. di acetato sodico sciolti in 10 cc. d'acido acetico glaciale diluito colla metà del suo volume d'acqua. La soluzione, un po' torbida, venne scaldata per qualche minuto a b. m. e poi abbandonata a se stessa per 24 ore; versandola nell'acqua si ottenne un precipitato resinoso, che fu versato su filtro, lavato e seccato nel vuoto; si ebbero 3,9 gr.

A differenza della resina primitiva, questo prodotto non si scioglie più completamente nell'etere; ne restarono indietro 0,9 gr. Il residuo venne purificato precipitando la sua soluzione in etere acetico con etere di petrolio. Si ebbe così una polvere bianca, che fondeva a 232°. Seccata a 100°, essa ha la composizione corrispondente alla formola

$$C_{29}H_{27}O_4N_3 = C_{28}H_{24}O_3 \cdot CON_3H_3 ,$$

che sarebbe quella di un *monosemicarbazone del tetramero* $4C_7H_6O$.

Questi fatti potrebbero far supporre che il prodotto di condensazione dell'aldeide benzoica fosse un chetone della seguente formola:

$$\begin{array}{llll} C_6H_5 & C_6H_5 & C_6H_5 & C_6H_5 \\ | & | & | & | \\ CO & -C.OH- & C.OH- & CH.OH \end{array}$$

ma, come bene si comprende, massime trattandosi di sostanze amorfe, questa interpretazione ha bisogno di ulteriori prove sperimentali, che speriamo di potere dare in seguito.

Dibenzilidenacetone ed alcool.

Esponendo al sole il suddetto chetone nell'alcool, in cui trovavasi in gran parte sospeso, si osserva già dopo qualche giorno che i cristalli del primo si vanno trasformando in una resina gialla, che rimane aderente alle pareti del tubo, mentre la soluzione alcoolica acquista un colore rosso. L'insolazione di 45 gr. del chetone in 225 cc. d'alcool durò dal 4, VI al 22, X 1908. La resina ottenuta pesava 40 gr.; l'alcool distillato non conteneva tracce sensibili di aldeide acetica.

La resina venne purificata per precipitazione della soluzione eterea con etere di petrolio. Ripetendo più volte questa operazione, si ottenne una polvere quasi bianca, che fondeva fra 125 e 135°. Essa ha una composizione che si avvicina alla formola $C_{17}H_{15}O$ ed un doppio peso molecolare, determinato in soluzione benzolica.

Data la costituzione del dibenzilidenacetone,

$$C_6H_5 . CH = CH - CO - CH = CH - C_6H_5 ,$$

si comprende che oltre alla condensazione pei doppî legami è possibile anche quella pinaconica.

Contegno del safrolo e dell'isosafrolo in presenza di iodio.

È noto dagli studî di diversi autori, Angeli, Balbiano, Bruni ed altri, che il doppio legame di questi isomeri ha un contegno differente; che in genere il gruppo propenilico è più attaccabile di quello allilico e dà anche più facilmente origine a prodotti di polimerizzazione. Ne abbiamo avuto una prova pure nel comportamento di questi due corpi alla luce, perchè mentre il safrolo resta quasi del tutto inalterato, l'isosafrolo si trasforma in una resina da cui abbiamo potuto separare in piccola quantità il *diisosafrolo*,

ottenuto da Angeli e Mola (1) per riscaldamento dell'isosafrolo con acido cloridrico alcoolico in tubo chiuso a 160°.

Le due sostanze, il safrolo e l'isosafrolo, vennero esposte alla luce dal 14, I, 1907 al 1, I, 1908 dopo avervi aggiunto un po' di iodio.

Distillando il primo con vapore acqueo, passò quasi tutto il prodotto inalterato tranne un po' di resina che restò nel pallone.

L'isosafrolo invece s'era trasformato in una massa resinosa bruna cosparsa di cristalli. Trattando con etere, questi ultimi rimasero indietro ed altri se ne separarono poi dalla soluzione della resina, dopo averla alquanto concentrata. Questi cristalli, purificati dall'alcool, fondevano a 145-146° e si mostrarono identici col diisosafrolo dal punto di fusione 145° (A. e M.). Da 38 gr. di isosafrolo se ne ebbero 3 gr. Il rimanente del prodotto, liberato dal solvente e distillato con vapore acqueo, dà piccole tracce di un olio volatile formato da isosafrolo inalterato; il residuo è una resina bruna, fragile. Dai suddetti 38 gr. se ne ebbero 34.

Contegno del metileugenolo e dell'isometileugenolo in presenza di iodio.

Anche con queste coppie di sostanze si osserva il fatto suaccennato che il gruppo allilico è più resistente di quello propenilico nelle condensazioni provocate dalla luce, come lo è anche in altre circostanze.

Esponendo il metileugenolo con traccie di iodio alla luce, esso rimase presso che inalterato anche dopo una prolungata esposizione, dal 15, I, 1907 al 6, II, 1908. L'isometileugenolo invece trattato nello stesso modo si trasforma in una massa giallastra resinosa, quasi solida. Quest'ultima si scioglie quasi completamente nell'etere e dà per svaporamento del solvente una specie di vernice, che venne distillata in corrente di vapore acqueo. Passano con esso poche goccie di isometileugenolo inalterato, mentre la maggior parte del prodotto resta indietro; da 35 gr. di isometileugenolo se ne ebbero 32,9 di resina. Per purificarla venne bollita a ricadere con etere petrolico (p. eb. 40-70°) e mentre quasi tutta la resina si discioglie, resta indietro un piccolo residuo resinoso bruno. Per lento svaporamento della soluzione petrolica si separa dell'altra resina, ma assieme con questa una sostanza cristallina formata da mammelloncini bianchi. Questa sostanza purificata dall'etere petrolico e poi dall'alcool metilico, si presenta in aghi sottilissimi che fondono a 96°. Essi hanno la composizione del *diisometileugenolo*, ma non sembrano identici al prodotto già descritto da Tibor Széki (2) ed ora da L. Francesconi e Puxeddu (3), prodotto che fonde a 106°; questi autori

(1) Gazzetta chimica, vol. 24, pag. 128 (1894).

(2) Berichte, vol. 39, pag. 2422.

(3) Gazzetta chimica, vol. 39, I, pag. 202 e segg. (20 febbraio 1909).

fecero anche l'interessante osservazione che l'isoeugenolo si polimerizza alla luce in soluzione alcoolica cloridrica, dando il diisoeugenolo, a cui corrisponde il suddetto etere metilico di T. Széki.

Benzaldeide e safrolo ed isosafrolo.

Dalle interessanti ricerche di A. Benrath (1), che costituiscono un seguito di quelle ben note di F. Klinger, si sa che l'aldeide benzoica per influenza della luce si addiziona a molte sostanze per formare svariati prodotti di condensazione. Contemporaneamente alle esperienze suaccennate, abbiamo voluto provare se il safrolo e l'isosafrolo avessero un contegno diverso rispetto all'aldeide benzoica. In questo caso i due isomeri reagiscono entrambi per formare prodotti di addizione della stessa formola empirica

$$C_7H_6O \,.\, C_{10}H_{10}O_2 \,,$$

ma con questo naturalmente non è detto che i due isomeri abbiano un contegno analogo, perchè la costituzione dei due prodotti può essere diversa anche pel modo in cui avvenne la reazione. Su questo proposito decideranno le ulteriori esperienze che stiamo preparando.

Vennero esposti al sole dal 7, I, 1907 al 1, I, 1908 contemporaneamente, 16 gr. di safrolo e 16 di isosafrolo mescolati ciascuno con 10 gr. di aldeide benzoica. I prodotti resinosi formatisi furono da prima liberati dalla sostanza primitiva rimasta inalterata per distillazione con vapore acqueo; dai 16 gr. di safrolo ed isosafrolo si ebbero rispettivamente 21 gr. e 18 gr. di residuo resinoso.

Quello proveniente dal safrolo venne purificato mediante ripetute estrazioni con alcool assoluto bollente: la parte che resta indietro fonde fra 150° e 180° ed ha la composizione indicata.

La resina formatasi dall'isosafrolo subì un analogo trattamento con alcool metilico. Per digestione a freddo con questo solvente, ripetuta parecchie volte di seguito, resta indietro una polvere bianca, amorfa, che fonde fra i 170° e 180° e che dette anch'essa all'analisi numeri corrispondenti alla formola suindicata.

(1) Journal für practische Chemie, vol. 78, pag. 383 (1906).

Chimica. — *Nuove ricerche sopra i composti aldeidici* (1). Nota del Corrispondente A. Angeli e del dott. V. Castellana.

In una Nota pubblicata recentemente sopra questo stesso argomento (2) abbiamo dimostrato che non tutte le ossialdeidi alifatiche reagiscono con la biossiammoniaca per formare i corrispondenti acidi idrossammici:

$$R.COH + NH(OH)_2 = R.C(NOH).OH + H_2O$$

e che il compiersi della reazione è intimamente collegato con la posizione del gruppo ossidrilico rispetto al residuo ossidrilico:

$$\begin{array}{l} COH \\ | \\ CH(OH).CH(OH).CH(OH) \ldots\ldots \\ \alpha \qquad \beta \qquad \gamma \end{array}$$

Quando l'ossidrile si trova in posizione α oppure β, la reazione procede in modo normale; negli altri casi invece riesce negativa e quindi bisogna ammettere che la molecola di tali sostanze abbia assunto un nuovo assetto in modo da non contenere più intatto il residuo aldeidico. Per maggiore chiarezza, ricorderemo nuovamente che noi operiamo sempre in soluzione alcalina e che impieghiamo il cloruro ferrico per svelare l'acido idrossammico eventualmente formatosi (colorazione violetta).

Proseguendo i nostri studî, abbiamo estesa la nuova reazione alle ossialdeidi cicliche, ed abbiamo incominciato da quelle aromatiche, come le più facilmente accessibili. Ancora qualche tempo addietro abbiamo fatto delle ricerche in proposito ed abbiamo anche accennato che la reazione riuscì negativa con l'aldeide salicilica, con l'aldeide paraossibenzoica ed anche con la vaniglina, senza però voler indagare a quale causa fosse dovuto il non compiersi della reazione.

Nel caso dell'aldeide salicilica si poteva ammettere che l'ossidrile in posizione orto ostacolasse l'azione della biossiammoniaca, come avviene p. e. per la ortonitrobenzaldeide; ma questa spiegazione si presenta subito come poco plausibile per il fatto che l'etere etilico dell'aldeide salicilica reagisce con grande facilità.

Un'altra causa si poteva attribuire all'ossidrile fenico, giacchè anche i fenoli stessi reagiscono per conto loro con la biossiammoniaca, però in pic-

(1) Lavoro eseguito nel R. Istituto di studî superiori in Firenze.

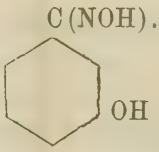
(2) Questi Rendiconti, XVII (1908), 2° sem., pag. 360.

cola parte, per dare prodotti talora colorati ovvero che si colorano per azione dell'ossigeno dell'aria.

Per portare un nuovo contributo allo studio di queste trasformazioni era quindi necessario eseguire uno studio sistematico, come si è fatto per le aldeidi della serie alifatica; e noi dobbiamo essere grati al prof. H. Pauly dell'Università di Würzburg, il quale ha facilitato il nostro còmpito inviandoci alcuni campioni di aldeidi, talune delle quali da lui stesso preparate per la prima volta.

Diremo subito che ottenemmo reazione negativa con l'aldeide protocatechica ed anche con il suo carbonato; dobbiamo però avvertire che quest'ultima sostanza viene facilmente saponificata dagli alcali e che perciò, con tutta probabilità, questo caso rientra nel precedente.

Invece la reazione si compie in modo netto con la metaossibenzaldeide, e così siamo pervenuti all'acido metaossibenzidrossammico che ancora non si conosceva:



Operammo nel solito modo: alla soluzione acquosa ed alcalina della metaossibenzaldeide aggiungemmo acido benzosolfoidrossammico in lieve eccesso; si nota un lieve riscaldamento e si osserva un debolissimo sviluppo di protossido di azoto; segno questo, come è noto, che la biossiammoniaca che si libera reagisce con l'aldeide presente. Siccome contemporaneamente si forma un po' di resina, giudicammo in questo caso opportuno di eliminare la maggior parte dell'acido benzosolfinico che ha preso origine, aggiungendo una soluzione satura e bollente di idrato di bario (1). Il liquido filtrato venne trattato con acido cloridrico diluito fino a che accenna a colorare in rosso la carta di metilorange, estratto un paio di volte con poco etere e successivamente con etere acetico. Per evaporazione di questo solvente si ottengono magnifici cristalli del nuovo acido: fonde verso 72° ed a caldo è molto solubile anche nell'acqua. Fornisce un sale di rame colorato in verdognolo, all'aria si colora in roseo e con cloruro ferrico dà una intensa colorazione violetta.

Bollito con acido solforico diluito viene facilmente idrolizzato e si ottiene idrossilammina che rimane sciolta nel liquido ed acido metaossibenzoico:

$$(HO) . C_6H_4 . C(NOH) . OH + H_2O = NH_2(OH) + (HO) . C_6H_4 . COOH$$

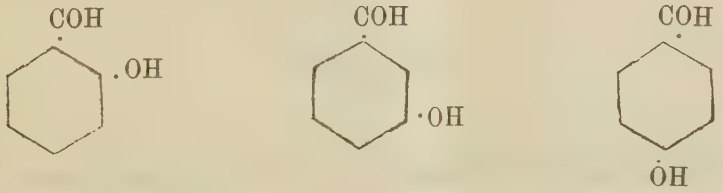
(1) Impiegando la quantità teorica di potassa caustica non si forma resina e l'acido formatosi si può anche precipitare per mezzo dell'acetato di rame.

che è identico ad un preparato che preparammo espressamente per il confronto.

Finora era noto solamente l'acido salicilidrossammico che venne preparato da Jeanrenaud (1) per azione del salicilato di metile sopra una soluzione acquosa di idrossilammina in presenza di potassa; e lo stesso autore ha trovato che, a parità di condizioni, non forniscono i corrispondenti acidi idrossammici gli eteri degli acidi metaossibenzoico e paraossibenzoico, giacchè vengono saponificati dall'alcali prima ancora di reagire con l'idrossilammina. Noi però, operando in soluzione alcoolica di idrossilammina, in presenza di etilato sodico, abbiamo potuto ottenere dal metaossibenzoato etilico un acido idrossammico che è identico a quello precedentemente descritto, preparato dall'aldeide metaossibenzoica. Il rendimento è quantitativo.

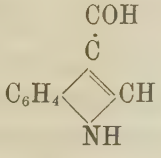
Sopra la sua natura non può quindi sorgere dubbio di sorta.

Sarebbe ancora prematuro, perchè ci mancano tutti i dati necessarî, il voler stabilire a quale causa sia dovuta questa diversità di comportamento delle tre ossialdeidi benzoiche:



rispetto alla biossiammoniaca; a questo riguardo però dobbiamo subito rammentare che già nella precedente comunicazione abbiamo espressamente posto in rilievo che, come risulta dalle esperienze finora da noi eseguite, non presentano la nuova reazione nessuna delle aldeidi che si preparano col metodo di Reimer e Tiemann, vale a dire per azione del cloroformio in presenza di alcali. È noto infatti che la sola aldeide metaossibenzoica non si può ottenere per mezzo di questa reazione.

Anche le aldeidi del gruppo del pirrolo e dell' indolo, che si possono preparare in modo analogo facendo agire su i pirroli e gli indoli cloroformio e potassa non forniscono i corrispondenti acidi idrossammici (2); ma l'aldeide metilindolica

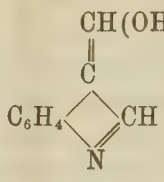


noi riuscimmo anche ad ottenerla *sotto forma di sale sodico* per azione

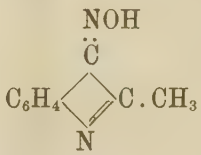
(1) Berliner Berichte XXII (1889), 1270.

(2) Angeli, questi Rendiconti, XVI (1907), 1° sem., pag. 382.

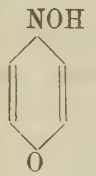
del formiato di amile in presenza di etilato sodico sopra l'α-metilindolo; questo fatto, come abbiamo già detto, rende molto probabile che la sostanza sia da considerarsi come un derivato ossimetilenico della forma:



A questo riguardo, data l'analogia che esiste fra aldeidi da una parte e nitrosoderivati dall'altra, crediamo opportuno accennare che il comportamento di questi composti aldeidici trova quasi riscontro in quello di taluni nitrosoindoli e nitrosofenoli (e naftoli). Come noi abbiamo dimostrato i primi sono da considerarsi come ossime, quale p. e. il nitrosometilindolo:



e che lo stesso vale per la maggior parte dei nitrosofenoli, i quali si comportano come chinonossime, p. e.

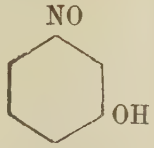


In questi casi, come si vede subito, è l'idrogeno imminico degli indoli, ovvero quello ossidrilico dei fenoli, che determina il nuovo assetto nella molecola e che toglie a questi composti i caratteri dei veri nitrosoderivati, perchè concorre a formare un gruppo ossimmico:

$$-NO \longrightarrow > NOH\,.$$

Non è quindi improbabile che anche nel caso delle ossialdeidi aromatiche si verifichi un fatto analogo, dovuto alla presenza dell'idrogeno ossidrilico; e questa supposizione verrebbe avvalorata dal fatto che gli eteri alchilici delle ossialdeidi aromatiche, vale a dire di quelle che non contengono più l'idrogeno ossidrilico, reagiscono tutti in modo normale con la biossiammoniaca per formare i corrispondenti acidi idrossammici. La reazione riesce positiva solamente quando l'ossidrile si trova in posizione meta rispetto al gruppo

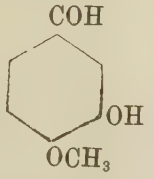
aldeidico: per analogia è quindi da aspettarsi che il metanitrosofenolo, che ancora non è stato preparato,



debba possedere i caratteri dei veri nitrosocomposti e non quelli delle chinonossime.

Le esperienze che abbiamo in corso ci permetteranno di verificare se le nostre previsioni sono esatte.

Accenneremo infine che a differenza della vaniglina, l'isovaniglina fornisce la reazione positiva; quest'ultima sostanza



come è noto, è un derivato dell'aldeide metaossibenzoica mentre la prima deriva dalla isomera para.

Chimica-fisica. — *Ricerche chimico-fisiche sulla lente cristallina* (1). Nota del Corrisp. Filippo Bottazzi e di Noè Scalinci.

V. — Imbibizione della lente nei liquidi oculari.

Dalle ricerche di Hofmeister (2) e di altri (3), risulta che l'imbibizione in soluzioni saline decorre in modo diverso da quella in acqua o in vapor d'acqua. Molte ricerche possono esser fatte a questo proposito: si può, scelto un sale qualsiasi, o più generalmente un qualsiasi elettrolito, indagare l'imbibizione in soluzioni variamente concentrate di esso; ovvero, studiare il processo d'imbibizione in soluzioni equivalenti di varî sali (nei quali l'anione rimanga lo stesso e variino i cationi, o rimanga lo stesso il catione e variino gli anioni), acidi e basi, ecc. Per ora noi abbiamo studiato solamente l'imbibizione della lente in soluzioni variamente concentrate di cloruro sodico.

(1) Dal laboratorio di Fisiologia sperimentale della R. Università di Napoli.
(2) Arch. f. exper. Path. u. Pharmak., XXVIII, pag. 210, 1891.
(3) Ved. W. Pauli. Ergebn. der Physiol., VI. Jahrg., pag. 105, 1907.

Prima di riferire i risultati delle nostre ricerche, dobbiamo però indugiarci un momento a parlare dell'imbibizione della lente immersa, fuori dall'organismo, negli stessi liquidi oculari (umor acqueo, umor vitreo).

Leber ha osservato che « die Linse nimmt ... sowohl in Glaskörperflüssigkeit als in *Humor aqueus* allmählich Wasser auf. Die Gewichtszunahme war auch, für die Ochsenlinse ... nur gering, ... ». La lente non s'intorbida. « Die frische Kaninchenlinse quillt dagegen (innerhalb der Kapsel) im Kammerwasser von Kaninchen ziemlich stark und wird getrübt » (1). Ciò dipende, secondo l'Autore, dal fatto che la pressione osmotica della lente è superiore a quella dell'umor acqueo e dell'umor vitreo, conforme ai risultati di Manca e Ovio e di Kunst.

Ma se la capsula è permeabile al Na Cl e a tante altre sostanze, com'è possibile che in vita sussista uno squilibrio osmotico fra la lente e i liquidi oculari? Prima però di rispondere a questa domanda, è necessario fare le seguenti altre considerazioni.

È ormai dimostrato che la lente « erfährt ..., bei direkter Berührung mit dem Kammerwasser, Quellung und Trübung, mit Abgabe von Eiweiss an das letztere und Ausgang in Zerfall und Auflösung ihrer Fasern » (Leber, loc. cit., S. 440); « genügt die Eröffnung der Kapsel, um die in Rede stehenden Folgen hervorzubringen; es ist lediglich die Einwirkung des Kammerwassers, welches, von der Linse duch die Kapsel getrennt, sich als völlig unschädlich für sie erweist, wodurch dieselbe bei direkter Berührung zur Quellung, zum Zerfall und zur Aufsaugung gebracht wird » (Leber, loc. cit., S. 442). In che consista l'azione alterante dell'umor acqueo, l'Autore non sa dire. Ma siccome la capsula, negli esperimenti di diffusione (S. 430) e di filtrazione (S. 429), si dimostrò al Leber permeabile non solo per i sali, ma anche per l'albumina, non può essere la capsula come tale che tiene al riparo la lente dalle conseguenze nocive del contatto coll'umor acqueo. Che cosa sarà, dunque? Ecco quel che dice Leber in propositò: « Da dasselbe Kammerwasser, welches, durch die Kapsel von der Linse getrennt, für sie unschädlich ist, sie bei direkter Berührung zerstört, da aber die Kapsel selbst für Wasser durchgängig ist, habe ich schon vor Jahren DIE VERMUTUNG ausgesprochen, dass, ähnlich wie das Endothel der Hornhaut die Erhaltung der Durchsichtigkeit dieser Membran sichert, indem es sie vor dem Eindringen des Kammerwassers schützt, *so auch das Kapselepithel der Linse den gleichen Schutz gewähre* » (loc. cit., S. 440). È dunque anche l'epitelio capsulare (anteriore) che solamente può rendere ragione dello squilibrio osmotico fra lente e umor acqueo (Leber).

Ma gravi obiezioni furono mosse alla « Vermutung » di Leber; fra le altre gravissima questa: che sulla faccia posteriore della capsula non esiste epitelio, e pure non avviene, *in vita*, assunzione d'acqua dall'umor vitreo,

(1) L. c., pag. 438 (ved. Nota I).

sebbene, *in vitro*, « die frische Linse quillt in Glaskörperflüssigkeit nicht merklich weniger als in Kammerwasser, auch ist der osmotische Koeffizient beider Flüssigkeiten ungefähr gleich » (Leber, loc. cit., S. 441).

E allora saranno le stesse fibre del cristallino, che impediscono la penetrazione dell'acqua, fibre che « in der ganzen Ausdehnung der hinteren Kapsel sich mit verbreiterten Enden mosaikartig an diese ansetzen, also eine Art von Epithelbelag darstellen »; esse « das Eindringen von Flüssigkeit in ähnlicher Weise abhalten, wie das Kapselepithel an der vorderen Fläche » (Leber, loc. cit., S. 441).

Ebbene, tutta questa concezione quasi mistica della funzione difensiva del preteso epitelio, è insussistente. L'epitelio anteriore è costituito di fibre lenticolari non allungate e più giovani, cioè dotate di caratteri citologici un po' più cospicui; le fibre non sono che cellule epiteliali più o meno allungate, situate in strati più o meno superficiali. Le proprietà chimico-fisiche degli elementi lenticolari non possono essere che identiche, e le eventuali differenze non possono dipendere se non dall'essere situate in strati più o meno profondi, e quindi dall'avere un grado più o meno alto d'imbibizione.

Le alterazioni della lente scapsulata sono dovute al fatto che il processo d'imbibizione del corpo cristallino, ormai non più tenuto in freno dalla capsula elastica, si svolge liberamente fino a che sia raggiunto il massimo d'imbibizione, del quale è conseguenza ineluttabile la disgregazione della lente, la sconnessione delle sue fibre, con tutti gli effetti facili a intendere: aumento di volume, intorbidamento, ecc.

In condizioni fisiologiche, il corpo della lente non si trova a un grado massimo d'imbibizione; da tale grado è tenuto lontano dalla capsula, che colla sua elasticità, ostacola il rigonfiamento della lente. L'elasticità della capsula può scemare, per varie ragioni, senza o prima che la capsula si rompa; e allora il processo d'imbibizione procede avanti, in qualunque liquido la lente sia immersa. Se poi la capsula è asportata, nulla più si oppone all'imbibizione della lente.

La misteriosa azione alterante dei liquidi oculari consiste semplicemente in ciò, che essi imbevono la lente, quando l'ostacolo che oppone la capsula è diminuito o soppresso.

Abbiamo fatto pochi esperimenti d'imbibizione in umor acqueo e vitreo, che riferiamo brevemente.

1. Un primo esperimento da noi fatto (7 marzo 1908) dette i seguenti risultati. Fu raccolto l'umor acqueo di 6 occhi e l'umor vitreo di 4 occhi di cani, e in questi due liquidi furono immerse due lenti di cane (alla temperatura costante di 30° C). Risultato:

	Umor acqueo	Umor vitreo
Peso iniziale della lente gr.	0,557	0,557
» dopo 3 ore . . . »	0,578	0,576
» » 22 » . . . »	0,453	—

2. Nel secondo esperimento (1 giugno 1908), fatto alla temperatura di circa 25° C, si ebbero i seguenti risultati:

	Umor acqueo	Umor vitreo
Peso iniziale della lente gr.	0,476	0,467
» dopo 1 ore . . . »	0,458	0,454
» » 2 » . . . »	0,456	0,454
» » 3 » . . . »	0,458	0,444
» » 22 » . . . »	0,468	0,472

Tanto nel primo quanto nel secondo esperimento, le lenti si mantennero perfettamente trasparenti. Nel primo esperimento, la lente immersa in umor vitreo fu scapsulata dopo la seconda pesata: ciò non ostante, dopo 22 ore, la lente, messa direttamente a contatto del liquido, rimase trasparentissima.

Nel secondo esperimento, i liquidi dopo 22 ore apparvero torbidi, certamente per attecchimento di batterii, ma le lenti erano sempre trasparenti.

3. In un terzo esperimento, fatto il 5 marzo 1908, nel quale ci limitammo a osservare le lenti, senza pesarle, notammo che tanto quella immersa in umor acqueo quanto l'altra immersa in umor vitreo, rimasero perfettamente trasparenti dopo 48 ore, sebbene i liquidi si fossero intorbidati.

La lente immersa in umor acqueo o in umor vitreo, dunque, in un caso prima aumento di peso e poi diminuì; nell'altro caso, prima diminuì di peso e poi aumentò. La diminuzione del peso può spiegarsi come effetto del prevalere della diffusione verso l'esterno delle sostanze proteiche della lente sulla penetrazione in questa di liquido; l'aumento del peso non può essere che effetto dell'aumentare del grado d'imbibizione della lente in conseguenza del diminuire dell'elasticità della capsula. In ogni caso, il corpo della lente rimane del tutto trasparente, non solo quando la capsula integra ne limita l'imbibizione, ma per 19 ore anche dopo l'asportazione della capsula; il che dimostra che assai più tempo è necessario perchè l'aumento del grado d'imbibizione del cristallino per sè solo, quando cioè i liquidi oculari in cui è immerso sono normali, produca opacamento della lente.

Zoologia. — *Descrizioni preliminari di varî Artropodi, specialmente d'America.* Nota del Corrispondente F. Silvestri.

III.

Nuovi *Chordeumoidea (Diplopoda).*
Fam. *Urochordeumidae* nov.

Il corpo è composto del capo, del collo, del segmento anale e di altri 29 segmenti. Può ripiegarsi alquanto in spira.

Il capo ha il vertice esposto, alquanto depresso, la faccia alquanto convessa. Gli occhi sono composti di varî ocelli. Le antenne sono molto lunghe col terzo articolo più lungo del quinto e questo un poco più lungo del quarto. Il labbro è tridentato. Le mandibole hanno circa undici lamine pettinate. L'ipostoma ha l'inframascellare diviso trasversalmente in due parti come i *Craspedosomidae,* e manca anteriormente di stili.

Il collo è molto convesso, a contorno quasi semiellittico ed è circa un terzo più largo che lungo e pochissimo più largo del capo. Ha il processo mediano anteriore di forma triangolare e moderatamente sviluppato.

I segmenti seguenti a cominciare dal quarto (dopo il collo) sono forniti di carene laterali grandi, orizzontali.

Il segmento preanale termina con una punta triangolare, che sorpassa di poco le valvole anali.

Ciascun segmento è fornito di sei setole dorsali come gli altri Chordeumoidea, però quelle sublaterali e quelle laterali sono disposte nella parte mediana della carena e non rispettivamente nella parte anteriore e posteriore di essa come è p. es. negli *Atractosoma.*

Le zampe sono lunghe, sottili.

Nel maschio quelle del 1° paio hanno alla parte basale interna del terzo articolo una lunghissima sporgenza triangolare, quelle del 3° paio hanno un lunghissimo processo subcilindrico arcuato sul primo articolo.

L'organo copulativo che trovasi al luogo del 1° paio di zampe del 6° segmento dopo il collo è composto di un paio di appendici uniarticolate fornite di un flagello.

Il secondo paio di zampe dello stesso segmento è formato di due articoli, dei quali il primo è terminato internamente da un processo falcato ed il secondo è all'apice convesso e peloso.

Le zampe del 1° paio del segmento 7° (dopo il collo) hanno nel primo articolo una vescicola estroflettibile.

Tutte le altre zampe lunghe, attenuate hanno il secondo articolo poco più corto del terzo e questo a sua volta poco più corto del sesto.

Ecologia. Questi Chordeumidi a differenza della maggior parte di quelli di altre famiglie sono di lenti movimenti e vivono nel legno di alberi morti.

Osservazione. Questa famiglia ha una posizione alquanto distinta ed isolata tra le altre dei *Chordeumoidea* per avere il segmento preanale prolungato in una punta che sorpassa le valvole anali. Anche la posizione delle setole dorsali è peculiare in questa famiglia, nonchè le appendici delle zampe del maschio.

Gen. *Urochordeuma* nov.

I caratteri del genere sono quelli indicati per la famiglia.

Urochordeuma Bumpusi sp. n.

Il corpo è di color castagno leggermente tendente al fulvo col ventre e gli articoli basali delle zampe di color terra d'ombra.

Le antenne ripiegate in dietro, quando il corpo è raccolto in spira sorpassano il primo segmento (dopo il collo) e superano in lunghezza la maggior larghezza del corpo comprese le carene.

Gli ocelli sono in numero di 14-15.

Il dorso dei segmenti porta piccolissimi granuli poco fitti e un paio per lato di granuli maggiori nella parte posteriore di ciascun segmento.

Le setole dorsali sono assottigliate e per lunghezza più corte del margine laterale delle carene. Queste sono piccolissime sui segmenti 1-3 (dopo il collo), cominciano a diventare abbastanza grandi sul quarto segmento, raggiungono la massima larghezza sul 7° e si mantengono quasi uguali fino verso il 26° segmento, dove il corpo si assottiglia un poco e le carene cominciano a diventare più brevi e a sporgere posteriormente coll'angolo laterale. Le carene della maggior parte dei segmenti hanno l'angolo anteriore e posteriore quasi retto, i margini anteriore e posteriore paralleli, il margine laterale poco profondamente sinuato verso la metà, dove sorge la setola laterale.

Anche il segmento antipenultimo è fornito di carene, che sono però più brevi di quelle del precedente.

La lamina subanale è quasi a forma di trapezio e in ciascun angolo posteriore porta una lunga setola. Le valvole anali hanno ciascuna sei setole presso il margine.

Le zampe sono lunghe, ma non raggiungono la larghezza massima del corpo comprese le carene.

Lunghezza del corpo mm. 19, larghezza del corpo colle carene 3, senza carene 1,7; lunghezza delle antenne mm. 3,5, delle zampe 2,7.

Habitat. Raccolsi di questa specie, che ho l'onore di dedicare al professore H. C. Bumpus, direttore del Museo americano di storia naturale di

New York, due esemplari maschi, e uno molto giovane, a Longmire Springs sul monte Rainier presso Tacoma (Stato di Washington).

Fam. *Rhiscosomididae* nov.

Il corpo è composto del capo, del collo, del segmento anale e di altri 27 segmenti. Può ripiegarsi in stretta spira.

Il capo ha il vertice alquanto esposto, ma molto meno che negli altri *Chordeumoidea*, giungendo il margine anteriore del collo fino alla parte posteriore degli occhi. La faccia è abbastanza convessa.

Gli occhi sono piccoli e composti di pochi ocelli. L'organo di Tömösvary ben sviluppato.

Le antenne sono piuttosto corte, col terzo articolo un poco più lungo del quarto e il quinto poco meno del doppio più lungo del quarto e più grosso degli altri.

Il labbro è tridentato. Le mandibole hanno sette lamine dentate. L'ipostoma ha l'inframascellare diviso trasversalmente in due parti come i *Craspedosomidae* ed ha anteriormente due stili con tre punte bene sviluppati.

Il collo è poco convesso molto più largo che lungo cioè il triplo almeno più largo che lungo ed è notevolmente più largo del capo. Manca del processo mediano anteriore tanto caratteristico degli altri *Chordeumoidea* e dei *Callipodoidea*.

I segmenti seguenti sono forniti di piccole carene laterali, le quali si trovano un poco più avvicinate al ventre che al dorso e sono dirette in fuori e un poco in basso.

Il segmento preanale termina posteriormente arrotondato.

Ciascun segmento è fornito di sei setole lunghe, delle quali le laterali sono situate quasi nel mezzo della faccia dorsale della carena alquanto lungi dal margine laterale.

Le zampe sono brevi.

Nel maschio le zampe sono conformate come nella femmina, soltanto il primo paio del segmento sesto (dopo il collo) si riduce a formare un organo copulativo, composto in ciascun lato di due articoli grossi ed un terzo articolo apicale molto breve e sottile, che in qualche caso sembra scomparire.

Ecologia. Questi Chordeumidi vivono nel legno di alberi morti, sono molto lenti di movimenti e nel loro complesso somiglianti a prima vista a Colobognati anzichè a Chordeumidi.

Osservazione. Questa famiglia ha una posizione affatto isolata tra gli altri *Chordeumoidea* per la grandezza del collo e per la mancanza in esso del processo mediano anteriore.

Anche l'organo copulatore è uno dei più semplici, che si conosca fra i *Chordeumoidea* e il secondo paio di zampe del sesto segmento (dopo il collo) è conformato come le altre zampe ambulatorie.

Essa famiglia si avvicina per l'apparenza generale ai *Rhiscosoma* Latz., ma in questi il collo è fornito ancora del processo mediano anteriore. Se nel maschio dei *Rhiscosoma* i caratteri sessuali fossero uguali a quelli del genere *Rhiscosomides,* si potrebbe ascrivere il genere *Rhiscosoma* ad una sottofamiglia *Rhiscosominae* nov., da collocarsi nella stessa famiglia *Rhiscosomididae.* L'Attems (Zool. Jarhb. Syst., XII, pag. 301), riferì con dubbio il genere *Rhiscosoma* alla famiglia *Trachysomidae*; io posso affermare che quest'ultimo genere non può essere affatto ascritto a tale famiglia, che è molto bene caratterizzata per la forma del capo e del collo, come ho potuto convincermi esaminando esemplari del genere *Acrochordum* Attems.

Gen. *Rhiscosomides* nov.

I caratteri del genere sono contenuti in quelli della famiglia.

Rhiscosomides Meineri sp. n.

Corpo di color castagno, col collo, la maggior parte del capo e il ventre di un color stramineo come pure sono di questo colore sei piccole macchie circolari su ogni segmento in corrispondenza alla base delle setole dorsali.

Il capo è coperto di corti e fitti peli.

Gli occhi sono composti di cinque ocelli.

Le antenne sono corte, poco meno del doppio più corte della larghezza del corpo comprese le carene laterali. Il sesto articolo è il più lungo ed il più grosso.

Il collo e tutta la parte dorsale dei metazoniti sono coperti di corti e sottili peli, che nascono generalmente appaiati sopra piccolissimi tubercoli emisferici ed hanno anche sparsi, specialmente alla base delle carene e sul margine posteriore, cortissimi tubercoli acuti.

Le carene dei segmenti 1-24 sono quasi ugualmente sviluppate, sono, come dissi, brevi molto più avvicinate al ventre che al dorso, il quale è molto convesso, e sono dirette in fuori e un poco in basso. Hanno l'angolo anteriore arrotondato, il posteriore acuto leggermente sporgente in dietro. Le carene del segmento 25° sono più corte delle altre essendo tutto il corpo più sottile, e quelle del segmento seguente sono ancora più piccole.

Le zampe sono tutte brevi.

Lunghezza del corpo mm. 7, larghezza colle carene 1,10, senza carene 0,71; lunghezza delle antenne 0,65, delle zampe 0,52.

Il maschio, come ho detto ha soltanto il primo paio di zampe del sesto segmento (dopo il collo) trasformato in un organo copulatore molto semplice.

Esso è formato della lamina ventrale, di tre grossi articoli per lato dei quali il secondo è poco più largo che lungo coll'angolo interno apicale, spe-

cialmente, arrotondato e fornito di varie setole abbastanza lunghe; il terzo articolo è piccolissimo, affatto rudimentale.

Habitat. Raccolsi varî esemplari di questa specie presso Lebanon nell'Oregono.

Dedico questa specie al collega R. W. Miner del Museo americano di storia naturale di New York.

Matematica. — *Sulle serie di Dirichlet.* Nota di Leonida Tonelli, presentata dal Socio Salvatore Pincherle.

È noto che, se una serie di Dirichlet

$$(1) \qquad f(z) = \sum_1^\infty a_n e^{-\lambda_n z}$$

(dove a_n è un numero generalmente complesso, e $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ è una successione di numeri positivi crescenti e tali che $\lim_{n=\infty} \lambda_n = \infty$) converge in un punto z_0, essa converge per ogni valore di z tale che sia $R(z) > R(z_0)$ (1). Questa proposizione vale anche, come ha mostrato W. Schnee (2), per quelle serie di Dirichlet più generali che hanno l'esponente λ_n reale o complesso, purchè sottoposto a certe *condizioni limiti*.

La condizione della convergenza nel punto z_0 non è, però, necessaria per concludere alla convergenza delle serie in tutto il semipiano $R(z) > R(z_0)$. Come già si sa, basta porre la condizione che la $\sum_1^r a_n e^{-\lambda_n z_0}$ si mantenga, per ogni r, minore in valore assoluto di un numero finito, fisso. Ora, io mi propongo di far vedere che questa condizione può essere allargata ancora più; e cioè che non è necessario porre la finitezza della somma $\sum_1^r a_n e^{-\lambda_n z_0}$. Più precisamente, mostro che *se, preso un numero positivo* η, *si può poi sempre determinare un* $\bar{n}$ *tale che, per ogni* $r > \bar{n}$, *sia*

$$\left| \sum_1^r a_n e^{-\lambda_n z_0} \right| < e^{\eta \lambda_r},$$

la serie (1) *è convergente in tutto il semipiano* $R(z) > R(z_0)$.

Da questa proposizione deduco poi un corollario relativo alle ordinarie serie di potenze. Esso è il seguente: *se, in un dato punto* x_0, *il termine generale* $a_n x_0^n$ *di una serie di potenze* $\Sigma a_n x^n$ *tende in modulo all'infinito,*

(1) $R(z)$ indica la parte reale di z.

(2) *Ueber irreguläre Pontenzreihen und Dirichletsche Reihen.* Inaugural-Dissertation, Berlino, 1908.

purchè di un certo ordine rispetto ad n (di ordine finito, p. es.), *la serie è convergente nel cerchio* $(0, |x_0|)$.

Questa proposizione è una generalizzazione di quella ben nota che stabilisce la convergenza di $\Sigma a_n x^n$ nel cerchio $(0, |x_0|)$ nell'ipotesi che, per ogni $n > \bar{n}$, sia $|a_n x_0^n| < M$, con M numero determinato e finito.

Nel § 2, dimostro che, *affinchè due serie di Dirichlet*

$$\Sigma a_n e^{-\lambda_n z} \quad , \quad \Sigma a'_n e^{-\lambda' n z}$$

rappresentino la stessa funzione, è necessario e sufficiente che, per tutti gli n, sia

$$a_n = a'_n \quad , \quad \lambda_n = \lambda'_n$$

(naturalmente si suppone che i coefficienti a_n e a'_n siano tutti $\neq 0$).

§ 1.

1. Si consideri la serie (1) e, z_0 essendo un determinato punto del piano della variabile z, si faccia l'ipotesi che, preso un numero positivo η, si possa poi sempre determinare un $\bar{n}$ tale che, per ogni $r > \bar{n}$, sia

$$\left| \sum_1^r a_n e^{-\lambda_n z_0} \right| < e^{\eta \lambda_r}. \tag{2}$$

Ponendo $z = z_0 + z'$, si ha

$$\sum_1^m a_n e^{-\lambda_n z} = \sum_1^m (a_n e^{-\lambda_n z_0}) e^{-\lambda_n z'},$$

ed applicando la trasformazione d'Abel,

$$\sum_1^m a_n e^{-\lambda_n z} = \sum_{r=1}^m S_r(z_0) (e^{-\lambda_r z'} - e^{-\lambda_{r+1} z'}) + S_m(z_0) e^{-\lambda_{m+1} z'}, \tag{3}$$

dove si è posto, per semplicità di scrittura, $S_r(z_0) = \sum_1^r a_n e^{-\lambda_n z_0}$. Mostriamo, ora, che se è $R(z') > 0$, ciascuna delle due parti del secondo membro di (3) ammette un limite determinato e finito per $m = \infty$. Per ogni $m > \bar{n}$, possiamo scrivere

$$\begin{aligned} \sum_{r=1}^m S_r(z_0) (e^{-\lambda_r z'} - e^{-\lambda_{r+1} z'}) &= \sum_{r=1}^{\bar{n}} S_r(z_0) (e^{-\lambda_r z'} - e^{-\lambda_{r+1} z'}) + \\ &+ \sum_{r=\bar{n}+1}^m S_r(z_0) (e^{-\lambda_r z'} - e^{-\lambda_{r+1} z'}). \end{aligned} \tag{4}$$

Abbiamo, poi,

$$e^{-\lambda_r z'} - e^{-\lambda_{r+1} z'} = z' \int_{\lambda_r}^{\lambda_{r+1}} e^{-t z'} \, dt,$$

e, ponendo $z' = z'_1 + iz'_2$,

$$|e^{-\lambda_r z'} - e^{-\lambda_{r+1} z'}| \leq |z'| \int_{\lambda_r}^{\lambda_{r+1}} e^{-tz'_1}\, dt .$$

Tenendo conto della (2), abbiamo, per ogni $r > \bar{n}$,

$$|S_r(z_0)\,(e^{-\lambda_r z'} - e^{-\lambda_{r+1} z'})| \leq |z'| \int_{\lambda_r}^{\lambda_{r+1}} e^{-t(z'_1 - \eta)}\, dt .$$

Poichè η, essendo arbitrario, può prendersi minore di $\frac{z'_1}{2}$, otteniamo

$$|S_r(z_0)\,(e^{-\lambda_r z'} - e^{-\lambda_{r+1} z'})| \leq |z'| \int_{\lambda_r}^{\lambda_{r+1}} e^{-\frac{tz'_1}{2}}\, dt .$$

Siccome poi

$$\int_{\lambda_{\bar{n}+1}}^{\infty} e^{-\frac{tz'_1}{2}}\, dt$$

converge, è

$$\lim_{m=\infty} \sum_{r=\bar{n}+1}^{m} |S_r(z_0)\,(e^{-\lambda_r z'} - e^{-\lambda_{r+1} z'})| < |z'| \int_{\lambda_{\bar{n}+1}}^{\infty} e^{-\frac{tz'_1}{2}}\, dt .$$

Segue, dalla (4), che la serie

$$\sum_{r=1}^{\infty} S_r(z_0)\,(e^{-\lambda_r z'} - e^{-\lambda_{r+1} z'})$$

converge assolutamente, e quindi anche semplicemente; cioè che la prima parte del secondo membro di (3) ammette, per $m = \infty$, un limite determinato e finito. Lo stesso, poi, avviene per la seconda parte, poichè, per la (2), è

$$|S_m(z_0)\, e^{-\lambda_{m+1} z'}| < e^{\eta \lambda_m} \cdot e^{-\lambda_{m+1} z'_1} < e^{-\lambda_m (z'_1 - \eta)}$$

per ogni $m > \bar{n}$; ed essendosi preso $\eta < \frac{z'_1}{2}$, risulta

$$|S_m(z_0)\, e^{-\lambda_{m+1} z'}| < e^{-\lambda_m \frac{z'_1}{2}} .$$

Dunque il primo membro di (3) ammette, per $m = \infty$, un limite determinato e finito, vale dire, per ogni z tale che sia $R(z) > R(z_0)$, la serie $\sum_1^{\infty} a_n e^{-\lambda_n z}$ è convergente.

2. La proposizione ora stabilita vale anche nel caso più generale in cui: 1°, la successione $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ sia composta di numeri generalmente com-

plessi e tali che, posto $\lambda_n = \alpha_n + i\beta_n$, sia da un certo punto in poi $0 < \alpha_n < \alpha_{n+1}$; 2°, sia $\lim_{n=\infty} \alpha_n = \infty$ e $\lim_{n=\infty} \frac{\beta_n}{\alpha_n} = 0$; 3°, la successione λ_1, λ_2, ... sia tale che, preso un numero positivo η, si possa sempre, corrispondentemente, determinare un numero $\bar{n}$ in modo che, per tutti gli $n > \bar{n}$, sia

$$\left| \frac{\beta_{n+1} - \beta_n}{\alpha_{n+1} - \alpha_n} \right| < e^{\eta \alpha_n}.$$

3. Come caso particolare della proposizione dimostrata si ha: *se esiste un numero reale s tale che sia, per ogni r maggiore di un certo* $\bar{n}$,

$$\left| \sum_1^r a_n e^{-\lambda_n z_0} \right| < \lambda_r^s,$$

la serie $\sum_1^\infty a_n e^{-\lambda_n z}$ *converge in tutto il semipiano* $R(z) < R(z_0)$. Preso, infatti, un numero reale η, è

$$\lambda_r^s = \frac{(\eta \lambda_r)^s}{\eta^s e^{\eta \lambda_r}} e^{\eta \lambda_r},$$

e, per essere

$$\lim_{n=\infty} \frac{(\eta \lambda_r)^s}{\eta^s e^{\eta \lambda_r}} = 0,$$

si può determinare un $\bar{\bar{n}}$ a partir dal quale sia $\lambda_r^s < e^{\eta \lambda_r}$.

4. Si abbia, ora, un'ordinaria serie di potenze $\Sigma a_n x^n$, e si supponga che, per un certo $x_0 \neq 0$, sia, a partire da un indice $\bar{n}$,

$$|a_n x_0^n| < n^s$$

(s numero positivo). Si ponga $z = -\log x$: si avrà

$$\Sigma a_n x^n = \Sigma a_n e^{-nz},$$

e, per $n > \bar{n}$, $|a_n e^{-nz_0}| < n^s$ ($z_0 = -\log x_0$). Da ciò segue

$$\left| \sum_1^r a_n e^{-nz_0} \right| \leq \sum_1^r |a_n e^{-nz_0}| = \sum_1^{\bar{n}} |a_n e^{-nz_0}| + \sum_{\bar{n}}^r |a_n e^{-nz_0}|$$

$$< A + \sum_{n=\bar{n}}^r n^s < A + r^{s+1}.$$

Quindi, per ogni $r > \bar{\bar{n}}$ e $> A$, è

$$\left| \sum_1^r a_n e^{-nz_0} \right| < 2r^{s+1} < r^{s+2},$$

e la serie $\Sigma a_n e^{-nz}$ converge per ogni $R(z) > R(z_0)$ (n. 3). Converge, dunque,

$\Sigma a_n x^n$ per ogni $|x| < |x_0|$. Analogamente, facendo uso della proposizione del n. 2, si dimostra la convergenza di $\Sigma a_n x^n$ nel cerchio $|x| < |x_0|$, nell'ipotesi che, da un certo $\bar{n}$ in poi, sia $|a_n x_0^n| < e^{\sqrt{n}}$, ed in generale $|a_n x_0^n| < f(n)$, dove $f(n)$ soddisfa alle condizioni: $f(n) < f(n+1)$, e $nf(n) < e^{\eta n}$, per ogni η positivo (1).

§ 2.

Consideriamo due successioni distinte di esponenti

$$\lambda_1 , \lambda_2 , \dots , \lambda_n , \dots$$
$$\lambda'_1 , \lambda'_2 , \dots , \lambda'_n , \dots$$

e supponiamo che le due serie di Dirichlet

$$\Sigma a_n e^{-\lambda_n z} \quad , \quad \Sigma a'_n e^{-\lambda'_n}$$

siano ambedue convergenti in un certo semipiano, rappresentando ivi la medesima funzione analitica. Possiamo anche supporre che sia $a_n \neq 0$, $a'_n \neq 0$. Come è noto, se h è un numero positivo appartenente al semipiano detto, è, in tutto il semipiano $\mathrm{R}(z) > h$,

$$\Sigma a_n e^{-\lambda_n z} = \Sigma s_n (e^{-\lambda_n z} - e^{-\lambda_{n+1} z})$$
$$\Sigma a'_n e^{-\lambda'_n z} = \Sigma s'_n (e^{-\lambda'_n z} - e^{-\lambda'_{n+1} z}),$$

dove abbiamo posto $s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$, $s'_n = a'_1 + a'_2 + \cdots + a'_n$. Nel semipiano $\mathrm{R}(z) > h$ è, perciò,

$$\Sigma a_n e^{-\lambda_n z} = z \Sigma s_n \int_{\lambda_n}^{\lambda_{n+1}} e^{-tz} \, dt \quad , \quad \Sigma a'_n e^{-\lambda'_n z} = z \Sigma s'_n \int_{\lambda'_n}^{\lambda'_{n+1}} e^{-tz} \, dt ,$$

ed anche, indicando con $\varphi(t)$ una funzione uguale ad s_1 in (λ_1 , λ_2), λ_2 escluso; uguale ad s_2 in (λ_2 , λ_3), λ_3 escluso; ecc.

$$\Sigma a_n e^{-\lambda_n z} = z \int_{\lambda_1}^{\infty} \varphi(t) \, e^{-tz} \, dt \quad , \quad \Sigma a'_n e^{-\lambda'_n z} = z \int_{\lambda'_1}^{\infty} \varphi'(t) \, e^{-tz} \, dt .$$

Dovendo essere, nel semipiano $\mathrm{R}(z) > h$, $\Sigma a_n e^{-\lambda_n z} = \Sigma a'_n e^{-\lambda'_n z}$, dovrà essere, nello stesso semipiano,

$$\int_{\lambda_1}^{\infty} \varphi(t) \, e^{-tz} \, dt = \int_{\lambda'_1}^{\infty} \varphi'(t) \, e^{-tz} \, dt .$$

(1) Questo si può anche vedere direttamente osservando che è $a_n x^n = a_n x_0^n \left(\frac{x}{x_0}\right)^n$.

Supponiamo, ora, che sia $\lambda_1 \neq \lambda_1'$ e, per es., $\lambda_1 < \lambda_1'$. Ponendo $\varphi'(t) = 0$ nel segmento (λ_1 , λ_1'), λ_1' escluso, l'uguaglianza precedente potrà essere scritta

$$\int_{\lambda_1}^{\infty} \varphi(t)\, e^{-tz}\, dt = \int_{\lambda_1}^{\infty} \varphi'(t)\, e^{-tz}\, dt.$$

Da qui segue, per un noto teorema di Lerch (1), che $\varphi(t) - \varphi'(t)$ è una funzione ad integrale nullo, vale a dire è una funzione nulla in tutti i punti, eccettuati quelli di un insieme di misura nulla. In particolare, è $\varphi(t) = \varphi'(t)$ in tutti i punti in cui $\varphi(t)$ e $\varphi'(t)$ sono continue.

Nel tratto $(\lambda_1 , \varepsilon)$, dove è $\varepsilon < \begin{cases} \lambda_2 \\ \lambda_1' \end{cases}$, $\varphi(t)$ e $\varphi'(t)$ sono continue; dunque in esso è $\varphi(t) = \varphi'(t) = 0$, cioè $s_1 = a_1 = 0$. Ma a_1 si è supposto $\neq 0$; deve essere perciò $\lambda_1 = \lambda_1'$. In $(\lambda_1 , \varepsilon_1)$, dove è $\varepsilon_1 < \begin{cases} \lambda_2 \\ \lambda_2' \end{cases}$, $\varphi(t)$ e $\varphi'(t)$ sono continue e rispettivamente uguali a_1 , a_1'; deve dunque essere $a_1 = a_1'$. Analogamente, per l'esistenza di punti di continuità per $\varphi(t) , \varphi'(t)$, in ogni tratto $(\lambda_r , \lambda_{r+1}) , (\lambda_r' , \lambda_{r+1}')$, si conclude, avendo supposto $a_n \neq 0 , a_n' \neq 0$,

$$\lambda_n = \lambda_n' \quad , \quad a_n = a_n' .$$

Matematica. — *Una dimostrazione assoluta del teorema di Gauss relativo all'invariabilità della curvatura totale nella flessione.* Nota di C. Burali-Forti, presentata dal Corrispondente T. Levi-Civita.

Riprendo le notazioni della mia Nota: *Alcune nuove espressioni assolute delle curvature in un punto di una superficie* (2) e mi propongo di dimostrare, sotto forma assoluta e semplicissima, il noto teorema di Gauss: *se due superficie sono applicabili esse hanno egual curvatura totale nei punti corrispondenti.*

Per tale dimostrazione occorre far uso di una nuova funzione R di una omografia vettoriale generica σ. Però delle numerose proprietà della omografia $R\sigma$, e che esporrò in altra occasione, basta far uso di quella che serve a definirla

$$(a) \qquad R\sigma(\mathbf{x} \wedge \mathbf{y}) = (\sigma\mathbf{x}) \wedge (\sigma\mathbf{y})$$

($\mathbf{x} , \mathbf{y}$ sono vettori qualunque) e di quella che, dimostrandone l'esistenza, ne assegna anche la forma effettiva qualunque sia l'omogr. σ

$$(b) \qquad R\sigma = \mathrm{inv}_2\sigma - (\mathrm{inv}_1\sigma)\, K\sigma + K\sigma^2,$$

(1) Acta Mathematica, t. XXVII, pag. 345.

(2) Questi Rendiconti, vol. XVIII, serie 5ª, 1° sem., fasc. 2°.

ovvero, per σ invertibile,

$$(b') \qquad R\sigma = (\mathrm{inv}_3\sigma)\, K\sigma^{-1}.$$

Consideriamo ora la solita superficie Σ descritta dal punto P ed, essendo O un punto fisso, sia

$$Q = O + N$$

il punto che descrive l'*indicatrice sferica* di Σ.

Se $\mathbf{u}$ è vettore parallelo ad $\mathbf{N}$, e ricordiamo che $\sigma\mathbf{N} = K\sigma\mathbf{N} = 0$, si ha da (b) $R\sigma\mathbf{u} = (\mathrm{inv}_2\sigma)\,\mathbf{u}$ (1); quindi se $d\mathrm{P}$, $\delta\mathrm{P}$ sono spostamenti infinitesimi (normali ad $\mathbf{N}$) di P, si ha da (a)

$$d\mathbf{N} \wedge \delta\mathbf{N} = (\sigma d\mathrm{P}) \wedge (\sigma\delta\mathrm{P}) = R\sigma(d\mathrm{P} \wedge \delta\mathrm{P}) = (\mathrm{inv}_2\sigma)\, d\mathrm{P} \wedge \delta\mathrm{P}$$

e, in conseguenza,

$$(1) \qquad \frac{d\mathrm{P} \wedge \delta\mathrm{P} \times \mathbf{N}}{dQ \wedge \delta Q \times \mathbf{N}} = \frac{d\mathrm{P} \wedge \delta\mathrm{P} \times \mathbf{N}}{d\mathbf{N} \wedge \delta\mathbf{N} \times \mathbf{N}} = \frac{1}{\mathrm{inv}_2\sigma},$$

la quale, per essere $d\mathrm{P} \wedge \delta\mathrm{P} \times \mathbf{N}$, $dQ \wedge \delta Q \times \mathbf{N}$ elementi corrispondenti di area nei punti P, Q di Σ e della indicatrice, prova che: *il limite del rapporto tra un elemento di area di Σ in* P *e la corrispondente area dell'indicatrice sferica è l'inverso della curvatura totale nel punto* P.

Il punto P_1, funzione di P, descriva una superficie Σ_1, per la quale $\mathbf{N}_1$, σ_1 abbiano lo stesso significato di $\mathbf{N}$ e σ per Σ.

Se Σ è applicabile su Σ_1 (P in P_1) allora per uno spostamento d qualsiasi si ha

$$(d\mathrm{P})^2 = (d\mathrm{P}_1)^2$$

ed esiste quindi una *isomeria-destra* λ funzione di P, cioè una omografia λ tale che

$$\lambda(K\lambda) = 1 \quad , \quad \mathrm{inv}_3\lambda = 1 \ (2),$$

che trasforma $d\mathrm{P}$ in $d\mathrm{P}_1$ ed $\mathbf{N}$ in $\mathbf{N}_1$,

$$(2) \qquad \lambda d\mathrm{P} = d\mathrm{P}_1 \qquad \lambda\mathbf{N} = \mathbf{N}_1.$$

(1) Se $\mathbf{x}$ è vettore normale ad $\mathbf{N}$ si ha

$$R\sigma\mathbf{x} = 0$$

perchè posto $\mathbf{x} = \mathbf{N} \wedge \mathbf{y}$ si ha da (a) $R\sigma\mathbf{x} = \sigma\mathbf{N} \wedge \sigma\mathbf{y} = 0$.

Applicando la (b) ad $\mathbf{x}$, e ricordando che $K\sigma = \sigma$, si ha

$$\sigma^2\mathbf{x} = \{(\mathrm{inv}_1\sigma)\,\sigma - \mathrm{inv}_2\sigma\}\,\mathbf{x}$$

che dà il quadrato di σ nel piano tangente a Σ in P.

(2) *L'Enseignement Mathématique*, loc. cit. Giova notare che le *isomerie vettoriali* danno sotto forma puramente geometrica e *assoluta* le ordinarie trasformazioni analitiche di variabile complessa nella sfera e nel piano.

Dalla seconda di queste si trae

$$(3) \qquad d\mathbf{N}_1 = (d\lambda)\,\mathbf{N} + \lambda d\mathbf{N}.$$

Essendo λ una isomeria-destra si ha da (b') $\mathrm{R}\lambda = \lambda$ e quindi se $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ sono vettori

$$(c) \qquad \lambda\mathbf{u} \wedge \lambda\mathbf{v} \times \lambda\mathbf{w} = \lambda(\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}) \times \lambda\mathbf{w} = \mathbf{u} \wedge \mathbf{v} \times \mathbf{w}.$$

Da questa e da (3) si trae

$$(4) \qquad d\mathbf{N}_1 \wedge \delta\mathbf{N}_1 \times \mathbf{N}_1 = d\mathbf{N} \wedge \delta\mathbf{N} \times \mathbf{N} + \\ + \{(d\lambda)\,\mathbf{N} \wedge (\delta\lambda)\,\mathbf{N} + (d\lambda)\,\mathbf{N} \wedge \lambda(\delta\mathbf{N}) - (\delta\lambda)\,\mathbf{N} \wedge \lambda(d\mathbf{N})\} \times \lambda\mathbf{N}.$$

Senza toglier nulla alla generalità si può supporre che Σ e Σ_1 siano disposte in modo che nel punto P (e in esso solo, almeno nei dintorni di P, ed escluso che Σ e Σ_1 siano eguali) si abbia $\lambda = 1$. In un punto di Σ, prossimo a P, il valore di λ è $1 + \varepsilon$, con ε omografia infinitesima. Ma $1 + \varepsilon$ è isomeria e quindi

$$(1 + \varepsilon)\,\mathrm{K}(1 + \varepsilon) = (1 + \varepsilon)\,(1 + \mathrm{K}\varepsilon) = 1,$$

ovvero, il che equivale,

$$\varepsilon + \mathrm{K}\varepsilon = 2\mathrm{D}\varepsilon = -\varepsilon\mathrm{K}\varepsilon.$$

Dunque la dilatazione di ε, $\mathrm{D}\varepsilon$, è infinitesima di ordine superiore ad ε. In conseguenza, ε si può ridurre, a meno di infinitesimi di ordine superiore, alla sua parte assiale, cioè si può porre

$$d\lambda = \mathbf{u}\wedge \quad , \quad d\lambda = \mathbf{v}\wedge,$$

con $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ vettori infinitesimi.

Ora, applicando note e semplici proprietà del doppio prodotto vettoriale e ricordando che $d\mathbf{N}$ e $\delta\mathbf{N}$ sono normali ad $\mathbf{N}$ (perchè $\mathbf{N}^2 = 1$), il secondo termine del secondo membro della (4) assume subito, nel punto P nel quale $\lambda = 1$, il valore

$$\mathbf{u}\wedge\mathbf{v} \times \mathbf{N} + \mathbf{u} \times \delta\mathbf{N} - \mathbf{v} \times d\mathbf{N}$$

che è infinitesimo di ordine superiore a $d\mathrm{P} \wedge \delta\mathrm{P} \times \mathbf{N}$, perchè $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$, assi delle isomerie $1 + \varepsilon$, formano angoli infinitesimi con $\mathbf{N}$, cioè angoli prossimi ad un retto con $d\mathbf{N}$ e $\delta\mathbf{N}$, mentre può esser finito l'angolo di $d\mathrm{P}$ con $\delta\mathrm{P}$.

Allora, osservando che dalla (c) si ha

$$d\mathrm{P}_1 \wedge \delta\mathrm{P}_1 \times \mathbf{N}_1 = \lambda d\mathrm{P} \wedge \lambda\delta\mathrm{P} \times \lambda\mathbf{N} = d\mathrm{P} \wedge \delta\mathrm{P} \times \mathbf{N},$$

dividendo i due membri della (4) per $d\mathrm{P}_1 \wedge \delta\mathrm{P}_1 \times \mathbf{N}_1$ e $d\mathrm{P} \wedge \delta\mathrm{P} \times \mathbf{N}$, e trascurando l'infinitesimo superiore del secondo membro, si ottiene

$$\frac{d\mathbf{N}_1 \wedge \delta\mathbf{N}_1 \times \mathbf{N}_1}{d\mathrm{P}_1 \wedge \delta\mathrm{P}_1 \times \mathbf{N}_1} = \frac{d\mathbf{N} \wedge \delta\mathbf{N} \times \mathbf{N}}{d\mathrm{P} \wedge \delta\mathrm{P} \times \mathbf{N}},$$

cioè, per la (1),

$$\mathrm{inv}_2\sigma = \mathrm{inv}_2\sigma_1$$

che dimostra il teorema di Gauss, perchè le curvature totali in P e P_1 sono appunto $\mathrm{inv}_2\sigma$ e $\mathrm{inv}_2\sigma_1$.

Fisica. — *Sulla presenza di torio nelle rocce.* Nota di G. A. Blanc, presentata dal Socio P. Blaserna.

In una precedente mia Nota (1) ho esposto come, dai risultati da me ottenuti nello studio dei prodotti radioattivi contenuti nell'atmosfera, io fossi stato condotto ad intraprendere delle ricerche allo scopo di mettere in evidenza la presenza del torio nei materiali costituenti il suolo del giardino circondante l'Istituto Fisico di Roma, e poi a fare una determinazione, se non altro approssimativa, della quantità di torio contenuta nell'unità di massa del suolo medesimo.

Ricorderò qui soltanto che coteste determinazioni, basate sulla misura della quantità di emanazione che per semplice diffusione si sprigiona da una determinata area del terreno, mi condussero alla conclusione che ogni grammo di questo terreno doveva contenere almeno gr. $1{,}45 \times 10^{-5}$ di torio.

Alla fine della suddetta Nota annunziavo essere in corso delle ricerche aventi per iscopo di determinare con un metodo assai più preciso le quantità di torio contenute in un certo numero di rocce di diversa natura e provenienza, e ciò a fine di stabilire se questo elemento dovesse essere considerato come un fattore importante o trascurabile della radioattività della crosta terrestre.

È da notarsi che, mentre si è sempre, fino ad ora, preso in considerazione il problema della presenza del radio nella crosta terrestre, e che sono state fatte ricerche accuratissime per determinare le quantità di radio contenute in un gran numero di rocce, nessuno, che io sappia, si è proposto il problema di stabilire quale parte abbia il torio nella radioattività del globo.

(1) Rendic. Acc. Lincei, XVII, pag. 101, 1908.

Ciò premesso passo a descrivere il procedimento da me seguìto in questa ricerca, facendo notare che i presenti risultati sono destinati ad essere seguìti da altri, che spero di ottenere presto, trattando un maggior numero di esemplari di rocce.

Trattandosi in queste ricerche di mettere in evidenza la presenza di tracce minime di materia radioattiva, la difficoltà principale consiste nel mettersi assolutamente al riparo dagli errori che possono nascere per la presenza accidentale di tracce di sostanze radioattive sia nei prodotti chimici, sia nei recipienti e negli apparecchi che in tali ricerche vengono adoperati.

A fine di ovviare ad ogni possibile dubbio che potesse sorgere in proposito, credo opportuno di esporre tutte le precauzioni da me prese perchè simili inconvenienti non avessero in alcun modo a verificarsi.

Anzitutto il locale nel quale venne eseguito il trattamento chimico non presentava alcun pericolo di contaminazione per parte di sostanze radioattive, nè erano stati mai introdotti in esso sali di torio, nemmeno sotto forma di reticelle per l'incandescenza a gas (1). Inoltre i recipienti e gli apparecchi adoperati erano nuovi, e con essi vennero eseguite prove preliminari per accertare che i reagenti adoperati, vale a dire il carbonato di potassio e di sodio, gli acidi cloridrico e solforico e l'ammoniaca fossero privi di tracce apprezzabili di attività di tipo di torio.

Finalmente, i campioni di rocce destinati alle indagini venivano tolti in seno a blocchi più grossi, in modo da presentare delle facce di rottura fresche su tutta la loro superficie.

Il procedimento chimico seguìto è stato il seguente: Un determinato peso di ciascun campione di roccia, ridotta in polvere finissima, veniva fuso a lungo in capsula di platino con un miscuglio di carbonati di sodio e di potassio, e la massa risultante da tale fusione veniva sciolta in molta acqua distillata: dopo filtrazione, la parte insolubile in acqua veniva trattata con acido cloridrico, e alla soluzione corrispondente, dopo separazione della silice gelatinosa per filtrazione, veniva aggiunta una quantità di acido solforico sufficiente a provocare la precipitazione della totalità dei solfati insolubili (e quindi del radio), i quali alla loro volta venivano separati mediante filtrazione.

Ciò fatto, alla soluzione veniva aggiunta dell'ammoniaca fino a completa precipitazione degli idrossidi, i quali, raccolti su di un filtro, venivano essicati e ridotti in polvere finissima.

(1) Questo lavoro venne eseguito nel Laboratorio Chimico Municipale di Chambery, al cui direttore, prof. Hollande, tengo a esprimere qui nuovamente la mia viva gratitudine per l'ospitalità concessami.

Esaminati all'elettrometro, questi idrati presentavano una attività la quale andava gradualmente crescendo per qualche settimana.

Ora poteva nascere il sospetto che l'attività riscontrata potesse provenire dalla presenza di qualche elemento radioattivo non appartenente alla famiglia dei prodotti di trasformazione del torio. Era prudente dunque, benchè i procedimenti chimici seguiti nella ricerca fossero tali da escludere la presenza di quantità apprezzabili di radio, di assicurarsi in modo diretto dell'assenza di questo corpo.

Benchè tale verifica sia stata fatta in ultimo luogo, vale a dire dopo che erano state compiute le misure che descriverò in appresso, purtuttavia credo opportuno parlarne ora. I campioni d'idrossidi riscontrati attivi vennero sciolti in acido cloridrico diluito, e la soluzione unica così ottenuta venne lasciata a sè per quindici giorni circa entro una boccia di Wulf ermeticamente chiusa; indi venne fatta gorgogliare dell'aria attraverso alla soluzione, e quest'aria dopo essere rimasta per un certo tempo in un secondo recipiente, per permettere all'emanazione torica di disintegrarsi totalmente, ed essere stata filtrata attraverso dell'ovatta per eliminare ogni traccia di prodotti di trasformazione dell'emanazione stessa, venne introdotta in un elettroscopio a cassa metallica, appositamente costruito, e la cui perdita di carica con aria della stanza era stata determinata in precedenza. Eseguite tali determinazioni venne preparata una soluzione campione contenente gr. 5×10^{-9} di radio, che venne lasciata a sè per due giorni chiusa nella boccia di Wulf: fattavi gorgogliare dell'aria, ed introdotta quest'aria nella cassa dell'elettroscopio, vennero eseguite nuove determinazioni della perdita di carica.

Le medie dei tempi impiegati dalla fogliolina d'alluminio dell'elettroscopio per percorrere una medesima divisione della scala micrometrica, sono riportate nella seguente tabella:

Con aria della stanza	Con aria gorgogliata nella soluzione degli idrossidi	Con aria gorgogliata nella soluz. di gr. 5×10^{-9} di Ra.
$22^m 34^s$	$22^m 37^s$	$3^m 1^s$

Siccome la quantità complessiva degli idrossidi provenienti dai campioni di rocce era di circa 500 gr., la presenza in essi di gr. 10^{-11} di radio per grammo avrebbe prodotto un'azione all'incirca uguale a quella prodotta dai 5×10^{-9} gr. di radio della soluzione campione.

D'altra parte, come vedremo in seguito, l'attività presentata dagli idrossidi da me separati corrisponde appunto a quella che produrrebbe la presenza in essi di quantità di radio superiori a 10^{-11} gr. per grammo, per cui, data la sensibilità del metodo adoperato per questa verifica si può concludere che il radio non ha parte in misura sensibile nell'attività degli idrossidi suddetti.

Esclusa la possibilità della presenza di tracce di radio le quali abbiano potuto avere un'azione sensibile, rimane da stabilire se l'attività osservata sia effettivamente dovuta a torio. Ora, benchè io non possa affermare in modo assoluto l'assenza di tracce di altri corpi radioattivi, credo di poter dire che l'azione radioattiva osservata negli idrossidi da me separati è dovuta, se non esclusivamente, almeno in massima parte ai prodotti della famiglia del torio.

Ho potuto difatti ottenere con cotesti idrati dei fenomeni di radioattività indotta sensibili, adoperando all'uopo un elettroscopio destinato allo studio della ionizzazione spontanea, dell'aria nei recipienti chiusi e l'andamento del processo di disattivazione è stato simile a quello dell'attività indotta del torio, senza che, d'altra parte, mi sia stato possibile osservare una maggiore rapidità iniziale della disattivazione stessa, quale si sarebbe dovuta avere nel caso fossero stati presenti in misura sensibile prodotti di trasformazione dell'attinio.

Rimarrebbe, se mai, da chiedersi quale parte abbiano potuto avere nelle mie esperienze le quantità di uranio che, secondo la teoria di Rutherford, così esattamente confermata da Boltwood, devono nelle rocce esistere in corrispondenza alla quantità di radio presente. Ora il procedimento chimico seguìto in questa ricerca doveva far escludere la presenza dell'uranio negli idrati, inquanto che il carbonato d'ossido d'uranio formatosi durante la fusione coi carbonati alcalini è assai facilmente solubile nelle soluzioni stesse, anche diluite, di questi carbonati, e doveva perciò essere passato nella soluzione alcalina.

Inoltre delle esperienze da me fatte in proposito, aggiungendo ai miei idrossidi delle quantità note d'uranio, mi hanno mostrato che le quantità di questo metallo che dovrebbero esistere in essi per produrre gli effetti da me osservati sono assai maggiori delle quantità che dal valore del rapporto $\frac{\text{uranio}}{\text{radio}}$ riscontrato da Rutherford e Boltwood si dovevano prevedere (1).

Vediamo ora quale era il procedimento seguìto per determinare la proporzione di torio contenuta nei varî campioni di rocce.

Una determinata quantità degli idrossidi, di cui sopra, veniva introdotta nella cassa di un elettroscopio a foglia d'alluminio, a chiusura ermetica, del tipo da me già descritto altra volta (2). Le misure, che erano ripetute

(1) L'effetto incomparabilmente minore prodotto dalla aggiunta di una determinata quantità di uranio agli idrati, a paragone dell'effetto osservato aggiungendo quantità dello stesso ordine d'idrato di torio, si spiega, del resto, malgrado che l'attività dell'uranio e del torio sia pressochè la medesima, pel fatto che dalla massa degli idrati contenenti il torio si sprigiona dell'emanazione, alla quale sono dovuti in gran parte gli effetti di ionizzazione osservati, mentre simile fenomeno non si verifica per l'uranio.

(2) Nuovo Cimento, luglio 1907.

varie volte, venivano incominciate dieci minuti dopo l'introduzione degli idrati nell'apparecchio, acciocchè l'emanazione avesse raggiunto l'equilibrio radioattivo.

Indi, agli idrati suddetti veniva intimamente mescolata una quantità nota di idrossido di torio, ottenuto dal nitrato chimicamente puro della casa de Haen, preparato da varî mesi, e perciò in equilibrio radioattivo col torio X. Con questa miscela venivano ripetute le misure descritte ora, servendosi del medesimo elettroscopio.

Per mostrare la serie di misure e di calcoli fatti per ogni campione di roccia basterà che io riporti per disteso i dati riguardanti una delle determinazioni.

Sienite della Cava di *Bagni* (*Biella*). La quantità di roccia trattata era di 250 grammi, i quali hanno fornito gr. 195 d'idrossidi. Di questi, 60 gr. vennero introdotti nell'elettroscopio: il tempo impiegato dalla fogliolina per cadere di una divisione risultò di 303^s; ai 60 gr. d'idrossidi vennero intimamente mescolati 0,01 gr. d'idrossido di torio: il tempo di caduta della fogliolina per divisione risultò ora di 126^s. La caduta a vuoto era di 1 divisione in 1440^s. Fatta la debita correzione per tale perdita di carica a vuoto, la quantità di idrossido di torio contenuta originariamente nei 60 gr. di idrossidi risultava 2,8 volte minore di quella esistentevi dopo l'aggiunta di 0,01 gr. della stessa sostanza, per cui risultava che la quantità di idrossido di torio originariamente contenuta nei 60 gr. di idrossidi era di gr. 0,00555, ossia di gr. 0,0000925 per grammo. Ma gr. 0,0000925 di idrossido di torio, assumendo per questo composto la formola $Th(OH)_2$, contengono gr. 0,0000807 di torio.

D'altra parte ricordando che gr. 250 di roccia hanno fornito gr. 195 di idrossidi, si ricava che ogni grammo di roccia deve contenere gr. 0,0000630 di torio.

Nella seguente tabella sono riportati i risultati da me ottenuti applicando cotesto procedimento:

Natura della roccia	Provenienza	Quant. di Th in gr. per gr.
Sienite	La Balma (Biella)	$8{,}28 \times 10^{-5}$
Sienite	Bagni (Biella)	$6{,}30 \times 10^{-5}$
Granito	Baveno (Lago Magg.)	$3{,}14 \times 10^{-5}$
Granito	Vosgi (Francia)	$2{,}07 \times 10^{-5}$
Protogino	Beaufort (Savoia)	quantità non apprezzabile

È interessante notare come le quantità di torio riscontrate in quattro sui cinque campioni di rocce granitiche da me esaminati siano dell'ordine di

grandezza della cifra $1,45 \times 10^{-5}$ da me dedotta, con metodo assolutamente diverso, per la proporzione di torio contenuta nel suolo di Roma.

Farò finalmente notare che secondo i recenti lavori di Pegram [1], l'energia liberata nell'unità di tempo, dal torio in equilibrio radioattivo coi suoi successivi prodotti di trasformazione, devesi considerare come 3000000 di volte circa più piccola della quantità di energia liberata da un' uguale massa di radio, anch'essa in equilibrio radioattivo coi suoi prodotti successivi. Ma in tal caso è chiaro che le quantità di energia liberate dal torio contenuto in ogni grammo delle singole rocce da me esaminate (se si eccettua il campione di protogino di Beaufort) dovrebbero essere dell'ordine delle quantità di energia liberate da 10^{-11} gr. di radio. Ora l'ordine di grandezza delle quantità di radio riscontrate da Strutt per grammo di roccia nel gran numero di esemplari da lui esaminati è di 10^{-12} gr. per grammo: i risultati da me ora ottenuti, e che è mia speranza poter presto ampliare coll'esame di altre rocce, confermano la supposizione, da me già altre volte formulata [2], che cioè il torio debba essere considerato come un agente d'importanza pari se non superiore a quella del radio, nella radioattività della crosta terrestre.

Fisica. — *Sopra alcune proprietà elettriche del selenio* [3]. Nota del dott. Vittorio Chiarini, presentata dal Socio A. Righi.

1. Quando i vapori di selenio si depositano sopra una superficie fredda, dànno luogo a prodotti che assumono due aspetti diversi, secondochè vengano raccolti entro la capsula in cui bolle il selenio puro, o fuori di essa. Nel primo caso formano uno strato di color nero, a struttura finamente granulosa, inalterabile all'aria; mentre nel secondo dànno cristallini che, uniti dapprima in corte barbe, si cambiano poi, per deliquescenza, in una poltiglia che asciugandosi produce una incrostazione rossastra di spessore uniforme. Questi due prodotti che, con tutta probabilità, corrispondono a gradi diversi di ossidazione del selenio che evapora in presenza dell'aria, hanno conduttività elettrolitica; e se vengono interposti fra due metalli, formano una coppia voltaica, come se al posto del selenio vi fosse acqua. Hanno adunque comportamento analogo a quello riscontrato dal prof. Righi su strati di selenio trasformato [4].

Praticamente, per avere una coppia a prodotti di selenio sublimato, si appoggerà un disco metallico sulla faccia di un altro disco rivestita di una di quelle due sostanze: la « nera » o la « rossa ».

(1) Le Radium, V, pag. 271, 1908.

(2) Nuovo Cimento, XIV, ottobre 1007, Le Radium, decembre 1907.

(3) Lavoro eseguito nell'Istituto di Fisica della R. Università di Bologna nel marzo del 1907.

(4) Righi, *Sulla forza elettromotrice del selenio*. Padova, 1888.

Le differenze di potenziale che ho misurate, formando coppie con elettrodi scelti in una serie abbastanza estesa di metalli, variano da $^1/_{50}$ a $^9/_{10}$ di volta; ma i loro valori sono notevolmente influenzati dalla pressione che può essere esercitata coi contatti. In generale, può dirsi che il prodotto « rosso » dà sempre forze elettromotrici maggiori del « nero ».

Le coppie a selenio sublimato, sono sensibili alla luce; e la nuova forza elettromotrice che per essa si manifesta, qualunque sia la varietà del derivato di selenio, che funziona da elettrolita, è concordante con quella che si ha nell'oscurità, se l'illuminazione del selenio si fa presso all'elettrodo più ossidabile. Anche questo — per ciò che riguarda il senso — è conforme a quanto riscontrò il prof. Righi, con le citate esperienze sul selenio cristallino usuale; ma non per la misura: giacchè, se gli strati sensibili usati dal Righi davano le maggiori variazioni quando si illuminava il selenio attiguo al metallo più ossidabile, con la mia coppia ho sempre ottenuto effetti di gran lunga più forti nel caso inverso. Inoltre, le pile a selenio del Righi davano variazioni di potenziale che, nei casi più favorevoli, non superavano i $^{16}/_{100}$ di volta; mentre con i miei prodotti, usando la luce di una lampada a gas ad incandescenza, tenuta a 35^{cm} dalla coppia, e spogliata della maggior parte della sua azione calorifica, a mezzo di strati liquidi assorbenti, ne ho misurate molte che raggiungevano i $^5/_{10}$ della forza elettromotrice data dalla coppia nell'oscurità, forza che — come ho detto — poteva arrivare fino a $^9/_{10}$ di volta. Se poi la coppia aveva il selenio su disco di zinco e si ricorreva ad intense illuminazioni, si riusciva non solo ad annullare la forza elettromotrice propria della pila, ma anche ad invertirla.

Mi fu quindi agevole studiare l'influenza dell'intensità di illuminazione sulla forza elettromotrice delle coppie formate con quei prodotti selenici.

I risultati che ebbi si possono riassumere così:

a) Se si prendono per ascisse le intensità luminose, e, per ordinate le corrispondenti differenze di potenziale, si ottengono delle curve con la concavità in basso, nelle quali il raggio di curvatura va generalmente crescendo al crescere dell'ascissa.

b) Le coppie a selenio « rosso » sono, in generale, a parità di tutte le altre circostanze, le più sensibili alla luce.

c) Se, dopo aver misurato la forza elettromotrice con luce crescente da zero sino alla massima illuminazione, si diminuisce gradatamente la luce (o viceversa), la curva di ritorno non coincide con quella avuta in precedenza. Ciò dipende dal fatto che il selenio sente con ritardo gli effetti di una variazione nell'intensità di illuminazione (1), e che i tempi necessarî a stabilire l'equilibrio della forza elettromotrice turbata da una determinata

(1) Qui debbo avvertire che per la costruzione delle curve indicate, le letture dell'istrumento di misura venivano sempre eseguite di 2 in 2 primi.

variazione di intensità luminosa e dalla variazione opposta, risultano molto diversi. Anzi, studiando i rapporti fra quei tempi, apparisce subito la seguente notevole e ben marcata differenza fra il comportamento delle due varietà di selenio sublimato.

d) Il selenio « rosso » sente più rapidamente il passaggio da un'intensità di luce minore ad una maggiore, che il passaggio inverso; accade il contrario per la varietà « nera ». Però, per entrambe le varietà, il rapporto fra gli intervalli di tempo anzidetti, tende all'unità, quando si compia una conveniente serie di passaggi fra quei due gradi di illuminazione. Ma, contemporaneamente, i limiti, in cui variano le differenze di potenziale, vanno restringendosi: con questo che, per la varietà « rossa », il limite superiore si innalza molto meno del limite inferiore; mentre, per il selenio « nero », quello che si innalza meno è l'inferiore. Ne viene di conseguenza che se si assoggetta una delle mie coppie a successivi passaggi dall'oscurità al massimo di luce e viceversa, sostando ai gradi intermedî, e facendo le letture ad intervalli di tempo uguali ed abbastanza lunghi, perchè l'ago dell'elettrometro si riduca fermo, si avranno delle curve le quali andranno gradatamente innalzandosi e tenderanno ad una *curva limite*, sulla quale, dopo un certo numero di inversioni, coincideranno tanto le curve di andata, come quelle di ritorno.

La prima delle figure qui riportate, si riferisce ad una coppia formata con zinco coperto di selenio « rosso » e ottone messo a contatto col selenio; la seconda, alla stessa coppia ma con selenio « nero ». In entrambi i casi, per ascisse, si sono prese le intensità luminose, in unità arbitrarie, e per ordinate le deviazioni lette in mm., nella scala dell'elettrometro.

2. Se un disco metallico su cui si sia formato il deposito di selenio « nero », si tiene per 4 ore almeno in una stufa a 180° e poi lo si lascia raffreddare con grande lentezza, si ha la trasformazione di quel prodotto « nero » in uno strato di selenio con struttura cristallina, a grani finissimi, di un colore grigio piombo, che si mostra discreto conduttore dell'elettricità, come lo era il prodotto da cui fu derivato, ma che non funziona più da elettrolita, nè fuori della luce, nè esposto alla illuminazione anche la più viva (1). Però, se si dispone una lamina metallica qualunque sopra al selenio trasformato di quel disco e, a poca distanza, si fa agire una macchina elettrostatica, l'elettrometro, collegato a quel sistema, si muove come se, per la durata delle scariche, il sistema stesso fosse sostituito da un elemento di Volta, avente lo zinco al posto del metallo a cui è aderente il

(1) Tutto ciò fa ritenere che il prodotto del ricuocimento del selenio « nero », non sia niente altro che selenio cristallino usuale, metallico. Per cui, il processo indicato viene a costituire un modo nuovo e molto semplice di trasformazione del selenio amorfo, modo che è già stato applicato alla costruzione di celle a selenio da Reinganun (Phy. Zest: 7,786, (1906).

selenio, il rame invece della lamina appoggiata al selenio, e acqua in cambio di questo selenio.

In tal modo si è formata una coppia a selenio, attiva soltanto sotto l'azione di onde elettromagnetiche. Esperimentando come si è indicato, la forza elettromotrice che in quella coppia si viene a generare è oltremodo

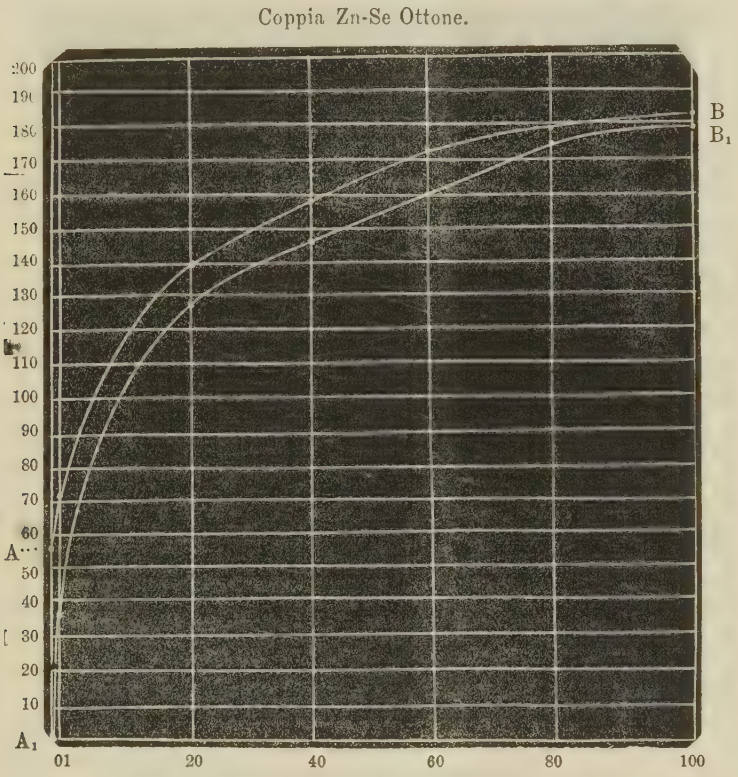


Fig. 1. — (Caso del prodotto rosso).
A_1B_1, prima curva — AB, curva limite
$A_1A > B_1B$
(Per semplicità non si sono disegnate le curve intermedie).

debole. Infatti, nelle migliori condizioni, quella f. e. oscilla fra $^1/_{150}$ e $^1/_{200}$ di Volta. Inoltre ne è resa difficile l'osservazione dalla circostanza che, per la non perfetta conduttività dello strato di selenio, nella prima e piccola parte del filo che va all'elettrometro, non protetta — come la rimanente parte — da un conduttore messo a terra, si manifestano delle azioni di influenza che alterano le deviazioni che dovrebbero metterla in evidenza.

Ciononostante mi riuscì di accertare il fatto, del quale poi ebbi piena conferma quando, con l'aggiungere proporzionata antenna al conduttore isolato della macchina elettrica, come pure ad un polo della coppia a selenio,

mi trovai in possesso di un dispositivo che poteva moltiplicare, direi quasi a volontà, gli effetti delle scariche sulla coppia in questione. Come esempio dirò che, tenendo la macchina a 8^m dalla coppia e producendo scintille di 1^{cm} con la frequenza di 180 al minuto primo, ebbi deviazioni dell'ago del-

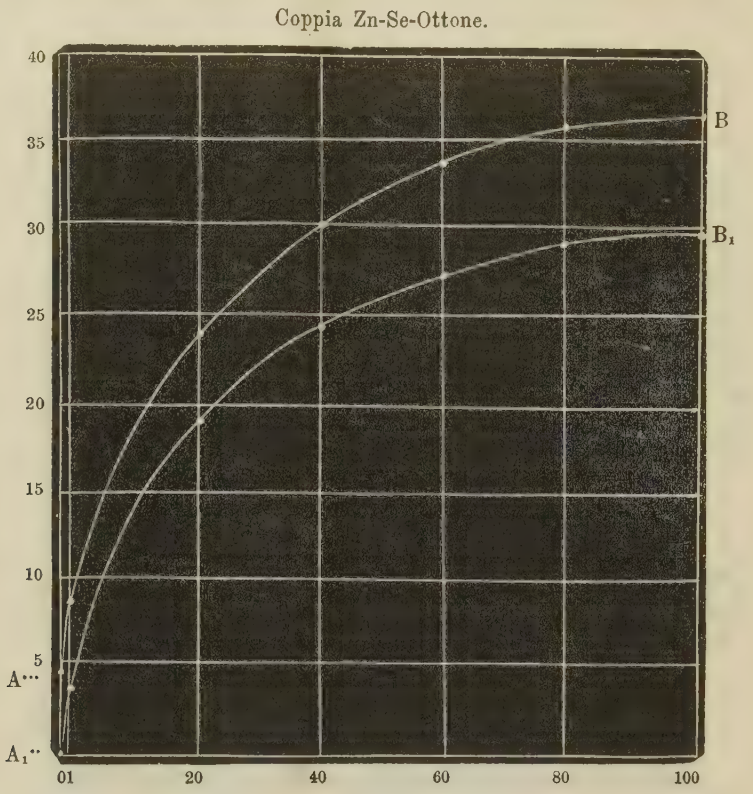


Fig. 2. — (Caso del Se sublimato di color nero).
A_1B_1, prima curva — AB curva limite.
$A_1A < B_1B$
(Anche qui, per non complicare la figura, si sono omesse le curve intermedie).

l'elettrometro che corrispondevano a forze elettromotrici di poco meno di un volta.

Potei allora facilmente accertare che le scariche esercitano un'azione, che è tanto più sentita quanto minore è la pressione che dagli elettrodi viene esercitata sul selenio; che la luce non altera sensibilmente il fenomeno; mentre il calore, se non giunge ad agire contemporaneamente ed uniformemente sui due contatti col selenio, può sovrapporvi effetti termoelettrici; ed infine che se più elementi formati con le stesse coppie di metalli, si riuniscono in serie, la forza elettromotrice che si ottiene cresce con gli elementi stessi, benchè non proporzionalmente al loro numero.

Ebbi campo di osservare lo stesso fenomeno usando selenio che avevo disteso per fusione sopra una piastra di ghisa o alla superficie di alcuni dischi di zinco e che trasformai in selenio metallico tenendolo per cinque ore in una stufa a 200°, per riportarlo poi alla temperatura ambiente in altre due ore.

Aggiungo, infine, che analogo comportamento riscontrai nel selenio delle varietà « tenera » e « dura » del prof. Ruhmer di Berlino, che dallo stesso mi fu preparato su alcuni dischi di zinco e di ottone (1).

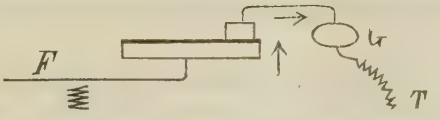
Questo fenomeno non è di facile spiegazione.

Credo però di potere escludere che esso sia dovuto ad effetti termoelettrici determinati dalle scintilline che potrebbero scoccare nel contatto del selenio con uno dei due metalli costituenti la coppia. Infatti, in questa ipotesi, l'entità del fenomeno dovrebbe unicamente dipendere dalla natura dei metalli che si mettono a contatto col selenio, cioè essere in perfetta relazione col potere termoelettrico di quei metalli rispetto al selenio; il che non si riscontra affatto. Inoltre, stando al senso con cui si presenta la forza elettromotrice temporanea in queste coppie a selenio, e ricordando che il selenio è il corpo più termoelettrico positivo, bisognerebbe ammettere che le scintilline venissero a scoccare, non fra il contatto imperfetto del selenio col metallo appoggiatovi, ma in quello intimo fra il selenio e l'altro metallo; il che sembra sommamente inverosimile.

Potrebbe invece dipendere da una specie di potere separatore che il sistema formato da un metallo al quale si sia fatto aderire del selenio trasformato nei modi indicati, verrebbe ad avere per le due specie di ioni. In tale ipotesi sarebbero altresì spiegati i seguenti fatti di conduttività unilaterale di quel sistema, che molto facilmente possono mettersi in evidenza. Ho assoggettato ad esperimento i varî dischi di cui sopra ho parlato, ed ho costantemente trovato:

a) che, usando corrente continua da 2 a 120 volta, risulta apprezzabilissima la differenza di conduttività che il sistema metallo-selenio presenta per i suoi due versi, specialmente quando si operi in ambiente asciutto. E precisamente che la corrente continua lanciata attraverso ad uno di quei dischi, passa meglio dal metallo al selenio che da questo a quello;

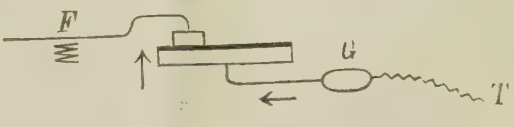
b) che gli indicati dischi a selenio, di fronte alla corrente alternata, funzionano da valvola, permettendo solamente, o in maniera prevalente, il pas-



saggio delle fasi che vanno dal metallo al selenio. Così, portando a contatto

(1) Di tutti i fatti accennati ebbi la riprova usando un osciliatore Righi.

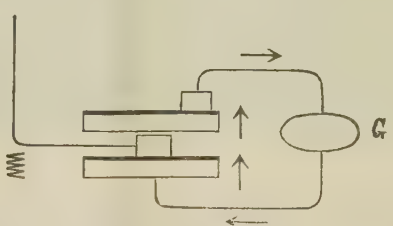
del metallo di uno di quei dischi un filo F, in comunicazione con la presa della corrente alternata stradale, e appoggiando sul selenio un dischetto collegato ad un estremo dell'avvolgimento di un galvanometro che abbia a terra l'altro estremo, si avverte una corrente continua che dalla coppia a selenio è diretta a terra; mentre se ne ha una, pure continua, ma proveniente dal suolo se F si appoggia sul selenio e l'estremo dell'avvolgimento



del galvanometro, che non è a terra, lo si porta a toccare il metallo del disco a selenio (1).

Per cui la sensibilità della coppia a selenio per le onde hertziane, potrebbe derivare dal potere separatore che il sistema metallo-selenio eserciterebbe sulle cariche di diverso nome portate in esso dalle correnti alternate di risuonanza, generate dalle onde stesse nel circuito chiuso su quel sistema. Le cariche positive si dirigerebbero verso il metallo appoggiato al selenio; le negative, invece su quello che porta saldato lo stesso selenio: credano in tal modo quella differenza di potenziale che ci apparisce all'elettrometro.

Riferisco infine che se un dischetto metallico, sede di rapide alternazioni — perchè in comunicazione o con la presa di una corrente alternata



o con un'antenna colpita da onde elettromagnetiche — viene interposto fra due dischi a selenio aventi entrambi la faccia coperta con selenio voltata dalla stessa parte, un filo chiuso sulle faccie esterne di quei dischi, è percorso da una corrente continua, diretta in modo da attraversare i dischi stessi dal metallo al selenio, e che risulta dalla sovrapposizione delle semionde opposte della corrente alternata, raccolte separatamente dai due dischi.

(1) L'intensità di queste correnti è piccola. Nelle misure da me fatte, sempre adoperando corrente alternata a 115 volta, essa oscillava fra 10 microampère e qualche milliampère. Il suo valore dipende da diverse circostanze: spessore dello strato di selenio, pressione dei contatti sul selenio, temperatura del sistema, illuminazione del selenio presso il contatto mobile. Mi è sembrato quindi opportuno intraprendere, in proposito, speciali ricerche, di cui darò conto in altro mio scritto.

Riassumendo quanto qui ho esposto, posso adunque dire:

1. Per sublimazione il selenio dà due prodotti distinti: il « rosso » e il « nero » che interposti fra due metalli, presentano conduttività elettrolitica.

2. Le più elevate differenze di potenziale, a parità di tutte le altre circostanze, si riscontrano nelle coppie a selenio « rosso ».

3. Le coppie a prodotti di selenio sublimato sono sensibili alla luce.

4. Le coppie con selenio « rosso » hanno per la luce maggiore sensibilità delle analoghe a selenio « nero ».

5. Il prodotto « rosso » sente più rapidamente il passaggio da una intensità di luce minore ad una maggiore, che il passaggio inverso. Il contrario accade per la varietà « nera ».

6. Le coppie a prodotto « nero » sottoposto a ricuocimento, le coppie a selenio metallico delle varietà « tenera » e « dura » del prof. Ruhmer, come pure quelle formate con selenio cristallino usuale, diventano attive sotto l'azione di onde elettromagnetiche.

7. I dischi metallici portanti selenio cristallino, comunque ottenuto, presentano conduttività unilaterale nel senso dal metallo al selenio e, conseguentemente, di fronte alle correnti alternate hanno comportamento da valvola;

8. Non è improbabile che la sensibilità di dette coppie per le onde elettromagnetiche, come la conduttività unilaterale che, per la corrente elettrica, presenta un sistema formato da un metallo coperto da una sua parte con selenio di una delle varietà sopra indicate, dipenda da una specie di potere separatore per le due specie di ioni che sarebbe propria di quel sistema.

Fisica. — *Sulla variazione di tenacità del ferro nel campo magnetico.* Nota del prof. Ernesto Drago, presentata dal Socio P. Blaserna.

Chimica. — *Su alcune reazioni dei nitroderivati.* Nota di Livio Cambi, presentata dal Corrispondente A. Angeli.

Le Note precedenti saranno pubblicate nel prossimo fascicolo.

Chimica. — *Azione della potassa sull'epicloridrina in presenza di fenoli monovalenti* (1). Nota di V. Zunino, presentata dal Socio E. Paternò.

In due Note precedenti (2) ho riferito sull'azione della potassa sull'epicloridrina in presenza di alcoli primarî, secondarî e terziarî.

Ho esteso ora le ricerche nel campo dei fenoli, i quali per le loro proprietà chimiche stanno fra gli alcooli e gli acidi. I sali di potassio ottenuti sciogliendo a caldo i fenoli nella potassa caustica, si comportano coll'epicloridrina analogamente agli alcoolati secondo l'equazione:

$$\begin{array}{l} CH_2Cl \\ | \\ CH \\ | \\ CH_2 \end{array} \!\!\diagdown\!\!\diagup\!\! O \; + KOH + 2R.OH = \begin{array}{l} CH_2.O.R \\ | \\ CHOH \\ | \\ CH_2.O.R \end{array} + H_2O + KCl$$

in cui R è un radicale di fenolo monovalente. La reazione è vivissima, spontanea anche a freddo, ma il rendimento è scarso: questo fatto è forse in relazione con le leggi di Meutcheukine sull'eterificazione degli alcoli, i quali, è noto, si eterificano bene se primarî, scarsamente se secondarî, più scarsamente ancora se terziarî.

Ora, in alcuni casi, come nelle ossidazioni, i fenoli hanno un comportamento di alcool terziario.

Furono studiati: fenolo, metacresolo, ortocresolo, timolo e carvacrolo.

Ecco i risultati:

ETERE DIFENOLICO.

PM = 244.

Si forma con molta vivacità e grande sviluppo di calore appena l'epicloridrina si aggiunge goccia a goccia alla soluzione di fenolo e potassa caustica. Distilla bene a 287°-288°; è liquido di odore grato che non ricorda in nulla il fenolo.

(1) Lavoro eseguito nel R. Istituto tecnico di Savona, 1908.

(2) Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, classe di scienze fisiche, matematiche e naturali, vol. VI, 2° sem., serie V, fasc. 11, pag. 348; e vol. IX, 1° sem., serie 5ª, fasc. 9°, pag. 309.

All'analisi gr. 0.2193 dell'etere dànno gr. 0.5941 di anidride carbonica e gr. 0.1313 di acqua; cioè per cento:

	trovato	calcolato per $C_{15}H_{16}O_3$
C	73.98	73.77
H	6.67	6.55

ETERE DIORTOCRESOLICO.

PM = 272.

Si prepara la soluzione di potassa e ortocresolo a bagno-maria, chè altrimenti il fenolo si altera. La reazione avviene con grande violenza, anche se l'operazione è fatta aggiungendo lentissimamente l'epicloridrina: l'etere che si ha distilla a 296°, ha odore grato ed ha colore leggermente giallognolo.

All'analisi gr. 0.3112 di sostanza dànno gr. 0.8553 di CO_2 e gr. 0.2049 di H_2O; cioè per cento:

	trovato	calcolato per $C_{17}H_{20}O_3$
C	74.96	75.01
H	7.32	7.35

ETERE DIMETACRESOLICO.

PM = 272.

Si forma, a differenza del suo isomero precedente, con reazione tranquilla e con rendimento buono, di circa il trenta per cento; ha color giallo citrino tenue: bolle a 253°-254°.

All'analisi gr. 0.2917 di sostanza hanno dato gr. 0.8006 di CO_2 e gr. 0.1961 di H_2O, cioè per cento:

	trovato	calcolato per $C_{17}H_{20}O_3$
C	75.20	75.01
H	7.47	7.35

ETERE DITIMOLICO.

PM = 356.

Si forma per il riscaldamento prolungato per molte ore in apparecchio a ricadere; anzi, mentre per gli eteri precedenti la reazione fra l'epicloridrina e la soluzione fenol-potassica incomincia già a freddo ed è quindi aiutata dal calore che si sviluppa nella reazione eminentemente esotermica, in questo caso invece la reazione non comincia che verso i 70°-75°, poscia pro-

segue regolarmente e lentamente con formazione dell'etere corrispondente indicato dalla separazione di cloruro potassico.

È liquido, un po'denso, e bolle bene a 215°.

All'analisi gr. 0.3088 di sostanza hanno dato gr. 0.8005 di CO_2 e gr. 0.2515 di H_2O; cioè per cento:

	trovato	calcolato per $C_{23}H_{32}O_3$
C	77.77	77.52
H	9.11	8.98

ETERE DICARVACROLICO.

PM = 356.

Si forma facilmente più del suo isomero descritto. È liquido, più denso dell'etere ditimolico; scaldato diventa scorrevole e bolle a 245°-246°.

All'analisi gr. 0.3019 di sostanza hanno dato gr. 0.8597 di CO_2 e gr. 0.2469 di H_2O; cioè per cento:

	trovato	calcolato per $C_{23}N_{32}O_3$
C	77.67	77.52
H	9.09	8.98

Fisiologia. — *Influenza della depressione barometrica sulla quantità di sangue contenuta nei polmoni* (1). Nota dei sigg. Paul Spehl e Émile Desguin, presentata dal Socio A. Mosso.

Nelle nostre ricerche ci siamo proposti di dosare la quantità di sangue che si trova in un dato momento nella circolazione polmonare di un animale vivente e di confrontare i risultati ottenuti facendo questo dosaggio a differenti altezze. Il prof. Heger aveva richiamato la nostra attenzione sull'utilità delle ricerche fatte allo scopo di determinare sperimentalmente l'influenza dell'altitudine sulla circolazione polmonare. Il prof. Mosso ci autorizzò di fare queste esperienze nei suoi laboratorii del Col d'Olen e noi lo ringraziamo unitamente al dott. Aggazzotti per l'aiuto e i consigli che ci hanno dato.

È vero che i polmoni tendono a congestionarsi quando si passa dalla pianura in una regione elevata? Certi fatti d'ordine clinico tendono a farlo credere; noi non li investigheremo, perchè le nostre esperienze hanno di

(1) Studio sperimentale fatto nei Laboratorii scientifici « A. Mosso » sul Monte Rosa. Agosto-Settembre 1907.

mira soltanto il problema fisiologico. In fisiologia si ammettono come fatti dimostrati le seguenti proposizioni:

Ogni aumento di pressione nell'aria alveolare tende ad anemizzare il polmone e ostacolare il passaggio del sangue proveniente dal cuore destro.

Nell' inspirazione naturale, per aspirazione toracica, aumenta la quantità di sangue nel polmone nel medesimo tempo che la quantità di aria: quanto più v' è di aria, tanto più sangue v' è nel polmone.

Nell' insufflazione polmonare o nella respirazione artificiale fatta per insufflazione, la quantità di sangue contenuta nel polmone diminuisce col crescere dell' insufflazione: in questo caso quanto più vi sarà di aria, tanto meno vi sarà di sangue nel polmone (1).

Queste proposizioni fanno prevedere che un aumento nella pressione atmosferica produrrà un certo ostacolo, almeno temporaneo, al passaggio del sangue a traverso i polmoni, mentre che l'influenza dell'altitudine si manifesterà con un afflusso più considerevole di sangue e una permeabilità più grande della rete polmonare.

Le esperienze incominciate sullo stesso argomento dal prof. Spehl nel 1882, furono fatte ad una altitudine troppo piccola (750 m.), per avere una differenza apprezzabile nella quantità di sangue circolante nel polmone dei conigli di cui egli si servì (2).

Il laboratorio di fisiologia dell' Istituto « A. Mosso », è ad una altezza di 3000 metri, al Colle d'Olen, e ci offriva un' occasione assai propizia per la soluzione del problema che ci interessa.

Il metodo che abbiamo usato è appunto quello che è stato descritto da E. Spehl nella sua tesi del 1883 (v. pag. 92 e seg.): apertura nel coniglio di una finestra parasternale, incisione del pericardio, passaggio rapido attorno dei vasi, alla base del cuore, di un filo solido (crine di Firenze) i cui due capi erano ricondotti ad una piccola asticella di metallo che serviva da punto d'appoggio per fare ad un determinato momento una forte legatura; dopo aver messo in posto il filo si richiude l'apertura e al bisogno si ristabilisce il vuoto nel pericardio con una leggera aspirazione di qualche millimetro di mercurio (3).

Prima di fare l'apertura della finestra parasternale, è opportuno legare la arteria mammaria interna e una intercostale. Spesso noi toglievamo la terza costa alla sua estremità sternale per un estensione di uno o due cen-

(1) Heger, *Expériences sur la circulation du sang dans des organes isolés*, Bruxelles 1873; Heger et E. Spehl, *Recherches sur la fistule péricardique chez le lapin*, Arch. de Biologie, vol. II, 1881; E. Spehl, *De la repartition du sang circulant dans l'Économie*, chapître. I, pag. 89 et suiv.

(2) *De la repartition du sang circulant dans l'Économie*, par E. Spehl. Thèse, Bruxelles 1883, chapître II, pag. 124 e seg.

(3) E. Spehl, loc. cit. pag. 101.

timetri; questa resezione non è sempre necessaria; nei conigli più grossi lo spazio intercostale è abbastanza largo per permettere di fare la fistola pericardica e di passare il crine di Firenze attorno ai vasi della base del cuore. Questa ultima manovra è talora molto delicata: Heger e E. Spehl si servivano di un filo di seta e di un portafili curvo; noi abbiamo preferito di non usare il portafili e di fare col crine di Firenze, un'ansa abbastanza rigida per essere passata attorno alla punta del cuore, e di farla poi retrocedere sino che essa racchiuda i vasi della base.

Quando il crine era in posto e tutto era pronto perchè la legatura potesse essere stretta ad un dato momento, ci si assicurava che il ritmo respiratorio, momentaneamente turbato per le manovre precedenti, fosse ritornato normale; se occorreva si aspettava qualche minuto, chè nulla lo impediva, mentre era assai importante di fare la legatura ad un determinato momento di una espirazione normale. È noto infatti, che la quantità di sangue che si trova nei polmoni varia assai nei varî tempi della respirazione: aumenta nell'inspirazione, diminuisce nell'espirazione (1); le esperienze non sono quindi confrontabili fra loro se non quando le legature, che interrompono il circolo del sangue nel polmone, vengano fatte nel medesimo tempo, e bisogna rifiutare quelle esperienze che lasciano un dubbio a questo punto di vista.

Non appena la legatura è fatta e solidamente fissata, si procede al dosaggio della quantità di sangue che si trova nei polmoni. Per fare questo dosaggio ci siamo valsi del metodo colorimetrico di Lesser modificato, osservando tutte le precauzioni indicate dai nostri predecessori (2); una serie di esperienze, fatte al laboratorio di fisiologia dell'Università di Bruxelles, ci aveva dimostrato l'esattezza del metodo, quale noi l'abbiamo poi usato.

La tavola qui annessa, riassume i risultati di 20 esperienze, queste si possono suddividere come segue:

3 esperienze fatte a Bruxelles prima di partire (16-20 agosto 1907);

10 esperienze fatte al laboratorio del Colle d'Olen (31 agosto-8 settembre 1907);

7 esperienze di nuovo a Bruxelles dopo il ritorno (23 settembre-9 ottobre 1907).

(1) E. Spehl, loc. cit. pag. 111.

(2) E. Spehl, loc. cit., pag. 56 e seg.

Data dell'esperienza	Data dell'arrivo del coniglio	Peso (1)	Momento della legatura	Quantità di sangue raccolta nel polmone	Quantità totale di sangue del coniglio	Rapporto delle due quantità	Pressione barometrica	Temperatura	Osservazioni
ESPERIENZE FATTE A BBUXELLES.									
16 agosto 1907	—	1150	espirazione	3cc 1	75cc 5	1 : 18.5	760	20°	
19 » »	—	1035	inspirazione	4.05	51.75	1 : 12.8	—	—	
20 » »	—	1000	espirazione	2.6	50	1 : 19.2	—	—	
23 settembr. »	—	1180	inspirazione	5	59	1 : 11.8	—	—	
27 » »	—	1250	»	7	62. 5	1 : 8.9	—	—	L'animale non respira normalmente, la legatura ha irritato le orecchiette, legatura in inspirazione violenta.
28 » »	—	1300	»	5.9	65	1 : 11	—	—	
1 ottobre »	—	1680	»	7	84	1 : 12	—	—	
5 » »	—	2250	»	8.5	112. 5	1 : 13.2	—	—	Legatura un po'vicina alla pausa inspiratoria.
7 » »	—	1570	»	6	78. 5	1 : 13.1	—	—	Qualche goccia di sangue è andata perduta nella manipolazione.
9 » »	—	1860	»	8	93	1 : 11.6	—	—	
ESPERIENZE FATTE AL COL D'OLEN (3000 m.).									
31 agosto 1907	29 agosto 1907	1975	inspirazione	10.6	98.75	1 : 9.3	539	8°	
1 settemb. »	—	1527	»	—	77. 0	—	—	—	In seguito ad una cattiva legatura l'animale non può servire alla valutazione della quantità di sangue del polmone e lo si adopera per determinare la quantità totale di sangue.
2 » »	—	2050	»	8.8	102 5	1 : 11.6	538	7	Leggera ferita di una vena polmonare.
3 » »	—	1445	espirazione	6	72.25	1 : 12.0	534	7	Legatura al principio dell'espirazione.
3 » »	—	1805	inspirazione	7	90.25	1 : 12.9	533.5	7.5	
6 » »	6 settemb. »	2600	»	13.6	130	1 : 9.6	543	10	Il coniglio era gravido di 6 embrioni.
7 » »	—	2290	»	15.5	114. 5	1 : 7.4	544	14	
7 » »	—	1262	»	7.4	63. 1	1 : 8.5	545	12	
7 » »	7 settemb. »	970	»	5	48. 5	1 : 9.7	545	12	
8 » »	—	915	espirazione	4.2	45.75	1 : 10.9	545	14	Legatura in forte inspirazione.
8 » »	29 agosto »	1630	inspirazione	9	81. 5	1 : 9.1	545	14	

(1) Il peso indicato in questa colonna rappresenta il peso dell'animale meno il peso del contenuto del tubo digestivo.

Come si vede la quantità di sangue trovata nei polmoni dei conigli recentemente trasportati all'altitudine del Col d'Olen, è maggiore di quella che è stata riscontrata, rimanendo uguali tutte le circostanze, nei polmoni dei conigli ad un' altitudine vicina al livello del mare.

Se si addizionano le cifre delle esperienze dello stesso ordine e si fanno le medie, si hanno i seguenti valori:

	Bruxelles	Col d'Olen
Quantità media di sangue contenuto nei polmoni in inspirazione	1 : 11.8	1 : 9.4
Id. id. id. id. in espirazione	1 : 18.8	1 : 12.1
Media generale	1 : 15.3	1 : 10.7

Un fatto pare quindi stabilito: che nei conigli trasportati da una piccola altitudine a quella del Col d'Olen, si produce un *aumento* nella quantità di sangue della piccola circolazione.

Questo sopraccarico può essere solo temporaneo: è possibile e a noi pare anche probabile, che un nuovo equilibrio si debba stabilire; ma nulla ci autorizza a formulare qui una conclusione in proposito, la durata del nostro soggiorno al Col d'Olen essendo stata troppo breve per permetterci di fare osservazioni in proposito. Confrontando i fatti che noi abbiamo constatato con quelli che furono osservati dai nostri predecessori, noi possiamo invocare come causa dell' iperemia polmonare la diminuzione della pressione barometrica per sè stessa: non ci sembra necessario invocare altri fattori. Infatti sul tessuto polmonare, che è largamente esposto all'aria, si esercita una azione meccanica discreta, come sulla superficie della pelle: la diminuzione rapida della pressione nell'atmosfera polmonare produce, secondo noi, un effetto di ventosa, al quale il tessuto polmonare, così riccamente vascolarizzato, sasà più sensibile della pelle.

Ma quanto tempo durerà questo effetto?

Noi non possiamo rispondere a questa domanda, perchè siamo stati costretti di operare tutti i nostri animali poco tempo dopo il loro arrivo al Col d'Olen, e per risolvere il problema sarebbe stato necessario rinnovare tutte le esperienze sopra animali ben acclimatizzati all'altitudine di 3000 metri: disgraziatamente, le circostanze non ci hanno permesso di prolungare il nostro soggiorno nei laboratorî del Monte Rosa per un tempo sufficientemente lungo per intraprendere questa nuova serie di ricerche.

Ad ogni modo è probabile che le modificazioni riscontrate si manterranno sino a che l'azione esercitata dalla diminuzione di pressione barometrica non sarà stata mutata per dei fattori che tendono a modificare inversamente la circolazione del polmone: azione meccanica che noi non possiamo ancora definire e che fanno intravedere le esperienze fatte sulle alterazioni del ritmo respiratorio nell'aria rarefatta. Certamente intervengono anche modificazioni cardiache fino ad ora non ben studiate.

In conclusione, tre fatti principalmente sembrano delinearsi dalle nostre esperienze:

1° *La quantità di sangue contenuta nel polmone del coniglio aumenta quando gli animali passano da una debole altitudine ad una di 3000 metri.*

2° *All'altitudine di 3000 metri, come al livello del mare, i polmoni contengono più sangue nell'inspirazione che nell'espirazione.*

3° *La differenza fra queste due ultime quantità sembra essere minore all'altitudine di 3000 metri, che ad un altitudine piccola vicina al livello del mare.*

PERSONALE ACCADEMICO

Il Presidente Blaserna dà il doloroso annuncio della morte del Socio nazionale prof. Giacinto Morera, mancato ai vivi il giorno 8 febbraio 1909; apparteneva il defunto all'Accademia, per la Meccanica, sino dal 18 luglio 1896; — e di quella del Socio straniero prof. Giulio Thomsen, morto il 13 febbraio 1909; faceva parte il defunto dell'Accademia, per la Chimica, dal 16 dicembre 1883.

PRESENTAZIONE DI LIBRI

Il Presidente Blaserna dà comunicazione alla Classe della seguente lettera ricevuta da S. E. il Generale Brusati:

Roma, 27 febbraio 1909.

Onorevole sig. Senatore,

Per incarico di S. M. il Re mi pregio rimetterLe N.° 40 volumi contenenti la relazione degli studi fatti da apposita Commissione Giapponese, sui più notevoli terremoti avvenuti in Giappone ed in altre parti del mondo.

Da detta relazione, che è frutto di studî serî e profondi, e che è compilata con cura ammirevole, la Commissione da Lei presieduta, istituita per indicare le zone più adatte per la ricostruzione degli abitati nelle località colpite dal terremoto, potrà forse trarre utili elementi.

Le offro, Sig. Professore, gli atti della mia osservanza

Dev.mo
G. Brusati

Il Presidente si affrettò a ringraziare per l'importantissimo dono, colla lettera seguente indirizzata al Generale Brusati:

Roma, 27 febbraio 1909.

Eccellenza,

Prego di voler esprimere a S. M. il Re tutta la mia riconoscenza per il bellissimo e importantissimo dono che Egli volle fare alla Commissione Reale incaricata di studiare

le zone più adatte per la ricostruzione degli abitati nelle provincie colpite dal recente terremoto.

È un'opera veramente mirabile, che i sismologi italiani in gran parte conoscono e cousultano; ma la collezione completa forse non esiste ancora in Italia. Siccome la Commissione da me presieduta ha la sua sede alla R. Accademia dei Lincei, io depositerò la grandiosa opera in quella biblioteca, affinchè sia a disposizione di tutti i Commissarî e di tutti gli studiosi.

Sua Maestà, con questo invio, ha voluto dare una nuova prova del grande interesse che nutre per gli studî e per tutte le grandi questioni che si agitano nel mondo.

Voglia, illustre Generale, accogliere l'espressione dell'alta mia considerazione.

Suo devmo ed affmo
P. Blaserna

Il Segretario Millosevich presenta le pubblicazioni giunte in dono, segnalando quelle dei Socî Bassani, Pflueger, Schiaparelli G., Taramelli, Berlese; e dei signori Ducceschi e Duhem. Fa inoltre menzione di un fascicolo pubblicato in occasione dei festeggiamenti al Socio straniero Zeuthen, pel suo 70° genetliaco.

CORRISPONDENZA

Il Segretario Millosevich dà conto della corrispondenza relativa al cambio degli Atti.

Ringraziano per le pubblicazioni ricevute:

La R. Accademia delle scienze di Upsala; la R. Accademia delle scienze di Lisbona; le Società zoologiche di Amsterdam e di Tokyo; la Società geologica di Manchester; la Società Reale e il Museo britannico di Londra; l'Osservatorio di marina di San Fernando; l'Osservatorio dell'Harvard College di Cambridge Mass.

E. M.